Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО “Уральский государственный технический университет – УПИ”

М.Г. Валишев, А.А. Повзнер

ФИЗИКА

Часть 1. МЕХАНИКА

Учебное пособие

Научный редактор: проф., д-р физ.-мат. наук Ф.А. Сидоренко

Екатеринбург
2006

УДК 531/534 (075.8)

ББК 22. 2я 73

Ф 50

Авторы: М.Г. Валишев, А.А. Повзнер

Рецензенты:

Ф 50

Физика. Часть 1. Механика: Учебное пособие / М.Г. Валишев, А.А. Повзнер. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006 83 с.

ISBN 5-321-00489-7

Учебное пособие представляет собой конспект лекций курса общей физики, читаемого студентам УГТУ-УПИ. В отличие от других пособий вращательное движение материальной точки и абсолютно твердого тела не выделяется отдельно, а рассматривается наряду с поступательным движением во всех разделах механики, что позволяет планомерно ввести новые понятия и выявить взаимосвязь этих движений. Обсуждаются основные положения специальной теории относительности и некоторые релятивистские эффекты, являющиеся следствием ее постулатов.

Пособие составлено в соответствии с утвержденной в 2000 г. программой по физике для студентов инженерно-технических специальностей университета по направлениям 550000 – Технические науки.

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22. 2я 73

ISBN 5-321-00489-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие написано в соответствии с утвержденной в 2000 г. программой по физике для студентов инженерно-технических специальностей университета по направлениям 550000 – Техническая наука и 540500 – Технологическое образование. В его основу положен цикл лекций, читаемых на кафедре физики УГТУ-УПИ.

В этом пособии в краткой и доступной форме излагается курс физики, целью изучения которого является формирование в каждом разделе опорных знаний, позволяющих выделить основополагающие опытные законы и на их основе построить схему метода познания данного круга природных явлений, выявить тенденции развития различных разделов в будущем. Подчеркивается мысль о том, что физика является наукой экспериментальной и поэтому соответствующее внимание уделено историческому аспекту её развития и тем экспериментам, которые позволяют выявить суть новых открытий и достижений.

Важную роль при изложении материала играет взаимосвязь между различными разделами курса физики, порядок их изложения. В данном пособии сначала рассматриваются разделы, изучающие явления, связанные с движением отдельных частиц и волн, а затем осуществляется переход к изучению систем, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой классических частиц и частиц, обладающих волновыми свойствами. Такое построение учебного материала позволяет постепенно подвести студентов к изучению самых сложных разделов физики и показать научную познаваемость окружающего мира.

Применяемый в данном учебном пособии уровень математики соответствует программе математического образования студентов младших курсов. Необходимые для изложения материала новые математические понятия вводятся постепенно, по мере необходимости. Громоздкие расчеты опускаются, но в ряде случаев для полноты картины, для создания завершённости построения материала, для вывода каких-либо законов, положений они приводятся в специальных параграфах, отмеченных звёздочкой. При изучении курса физики основное внимание уделяется пониманию физического содержания явлений, их качественному объяснению.

В данном учебном пособии согласно рекомендации Минвуза России принята международная система единиц (СИ), её краткое описание приведено в приложении 1.

Авторы выражают глубокую признательность коллегам и читателям за ряд полезных советов и замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Прежде чем приступить к изучению физики, необходимо выяснить её место среди других наук о природе, взаимосвязи физики с математикой и техникой, её роли в формировании естественнонаучного мировоззрения и его практического использования выпускниками технического университета.

1. Предмет физики. Всё, что нас окружает (мир, природа), принято называть материей. Ей приписывают ряд наиболее общих, фундаментальных свойств, а именно, она: 1) является объективной реальностью, существующей независимо от нас; 2) познаваема, материя копируется, отображается нашими органами чувств; 3) существует в виде вещества и полей, которые могут взаимно превращаться друг в друга; 4) существует в пространстве и во времени, их называют формами существования материи; 5) находится в непрерывном движении.

Под движением понимают всякое изменение вообще и выделяют следующие наиболее общие формы движения материи: физическую, химическую, биологическую и общественную. Самой простой из них является физическая форма движения материи.

Поэтому физика как наука изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, и законы её движения. В физической форме движения материи принято выделять механическую, тепловую, электромагнитную и квантово-механическую формы движения, в связи с чем курс физики разбивают на следующие разделы – механика, молекулярная физика и термодинамика, электромагнетизм, квантовая механика, физика конденсированного состояния, физика атомного ядра и элементарных частиц.

Физика является основой всех естественных наук (например, химии, биологии, географии, астрономии и т.д.), так как физическая форма движения материи входит в более сложные формы движения как их составная часть. При этом в настоящие время нет четкой границы между физикой и естественными науками, поскольку современные физические методы исследования широко внедряются в них и возникают соответственно такие дисциплины, как физическая химия, биофизика, геофизика, астрофизика и т.д.

Общность законов и выводов физики приводит к ее непосредственному влиянию на философию как науку о роли и месте человека в современном мире, физика формирует естественнонаучную картину мира и материалистическое мировоззрение, показывая познаваемость мира и возможность использования открываемых закономерностей на благо человека.

2. Физика – наука экспериментальная. Вся история развития физики показывает, что новые идеи и законы являются следствием опыта, эксперимента. В основе каждого раздела курса физики лежат фундаментальные законы физики, которые не выводятся теоретически, они являются обобщением опытных фактов. Эти законы позволяют построить в каждом разделе логически стройную картину описания данного круга явлений и взаимосвязи различных разделов курса физики.

К таким законам можно отнести законы Ньютона в механике, три начала в термодинамике, полную систему уравнений Максвелла в электромагнетизме, уравнение Шредингера в квантовой механике.

В физике реализуется, в основном, следующая схема познания, изучения явлений природы: 1) наблюдение какого-либо нового явления в природе, проведение опытов – многократного воспроизведения данного явления в контролируемых условиях; 2) объяснения результатов опытов с помощью различных гипотез, позволяющих теоретически объяснить закономерности протекания этого явления; 3) после экспериментальной проверки гипотеза либо отбрасывается, либо становится законом, позволяющим описать данную область явлений и подсказать новые явления, новые закономерности. Эти предсказания проверяются на опыте, и схема познания реализуется на более высоком уровне.

В настоящее время современное изложение курса физики можно существенно упростить в связи с тем, что ряд законов, открытых исторически опытным путем, выводится теоретически из фундаментальных законов физики. Например, закон электромагнитной индукции Фарадея является следствием закона сохранения энергии; законы теплового излучения можно получить на основе квантовой теории излучения. Однако нужно помнить, что физика является, прежде всего, наукой экспериментальной и поэтому при изложении курса физики нужно постоянно подчеркивать эту мысль, показывать реальный исторический путь ее развития.

3. Физика и математика. Любой физический образ, понятие, закон обязательно включают в себя наряду со словесным, наглядно–пространственным, также и аналитическое описание. Законы физики представляют собой количественные соотношения и формулируются на математическом языке. Поэтому отделить физику от математики невозможно. Широкое внедрение математического аппарата привело к делению физики как науки на экспериментальную и теоретическую физику. Применение математических методов позволило в теоретической физике не только записывать в компактной форме различные законы в виде уравнений, но и, следуя внутренней логике математических приемов, методов, получать новые результаты, которые не являются следствием опытных наблюдений. Конечно, справедливость новых формул, гипотез, полученных на “кончике пера”, проверяется на эксперименте. Примерами таких открытий могут служить предсказание Максвеллом существования электромагнитных волн, которое затем было экспериментально подтверждено Герцем, открытие античастицы – позитрона и реакции аннигиляции электрона и позитрона на основе решения уравнения, записанного Дираком.

Развитие физики, в свою очередь, стимулирует развитие математики. Изучение квантово-механической формы движения материи, физики атомного ядра и элементарных частиц, ранних этапов развития Вселенной требуют разработки новых понятий и методов в математике.

4. Физика и техника. Физика оказывает существенное влияние на развитие техники, новые отрасли в которой возникают в результате открытий в различных областях физики. К таким наиболее ярким примерам можно отнести создание электротехники (открытие закона электромагнитной индукции), радиотехники (открытие электромагнитных волн), вычислительной техники, лазерной техники на основе достижений в физике твердого тела, ядерной энергетики (открытия реакций деления тяжелых ядер).

Развитие физики способствует решению ряда принципиальных проблем, возникающих перед техникой и требующих создания физической картины, физического объяснения тех или иных явлений (например, звуковой барьер, повышение быстродействия ЭВМ, новые материалы в ракетостроении, невесомость и т.д.).

Постоянно повышающиеся требования, предъявляемые к качеству выпускаемой продукции (экономичность ее производства, экологическая безопасность для окружающей среды и человека), требуют качественного совершенствования технологических производств, широкого внедрения методов контроля и новых достижений в физике.

В свою очередь, техника поставляет новые, более усовершенствованные приборы и экспериментальные установки для физических исследований, что позволяет получать новые экспериментальные факты и тем самым способствует развитию физики. При этом широкое внедрение вычислительной техники, вычислительных методов приводит к созданию новых направлений в физике, связанных с моделированием на ЭВМ реальных процессов поведения физических систем, и тем самым позволяют существенно продвинуться в понимании процессов, протекающих в газах, жидкостях и твердых телах.

5. Физика и выпускник технического университета. В настоящее время возрастает роль физики в формировании научного мировоззрения и активной жизненной позиции выпускника технического университета. Это связано с широким внедрением новых достижений и открытий в различных областях физики в современное производство, необходимостью решения вопросов, касающихся его модернизации. На первый план выходят такие проблемы, как экономичность производства, его экологическая безопасность, повышение качества выпускаемой продукции.

Все это требует от современного выпускника как организатора производства не только качественно овладевать специальными знаниями, но и уметь разбираться в современном состоянии в области физической науки с целью применения новых разработок в производстве, в технологическом процессе.

Внутренняя логика построения курса физики, состоящая в постоянном переходе от изучения простых физических явлений к сложным, показывающая их познаваемость и взаимосвязь, в освоении при этом физическими методами исследования природных явлений, позволяют сформировать у выпускника технического университета материалистическое мировоззрение, естественнонаучную картину мира, что помогает ему в решении производственных проблем.

1. МЕХАНИКА

В данном разделе рассматривается механическое движение материальных тел и происходящие при этом взаимодействия между ними. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве. Для строгости и удобства изложения материала применяют две модели твердых тел – **материальная точка (м.т.)** – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данного движения, и **абсолютно твердое тело (а. т. т)** - это абсолютно недеформируемое тело или тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается постоянным при его движении.

Линию, по которой движется тело, называют **траекторией движения**. Для м. т. траекторию движения можно представить в виде сложения двух видов движений – по прямой линии и по окружности или как движение по окружностям разных радиусов R от нуля до бесконечности ($R \to \infty$ соответствует прямолинейному движению, рис.1.1а).

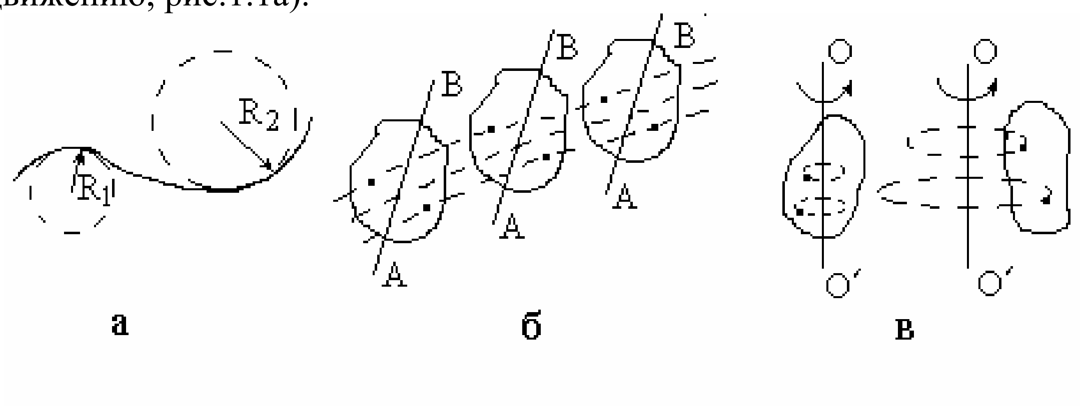


Рис.1.1

Для а.т.т. вводят два понятия: **поступательное движение** – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе (рис.1.1,б), и **вращательное движение вокруг неподвижной оси** – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения (она может находиться вне тела, рис.1.1,в).

Любое движение а.т.т. можно свести к сумме двух движений - поступательного и вращательного движений. При поступательном движении а.т.т. все его точки движутся по одинаковым траекториям (рис.1.1,б), поэтому можно заменить такое движение а.т.т. на движение одной м.т. – его центра масс (его определение будет в параграфе 1.2.4). Следовательно, поступательное движение а.т.т. не требует отдельного рассмотрения наряду с изучением движения м.т.

1.1. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ М.Т. И А.Т.Т.

Кинематика как раздел механики посвящена изучению геометрических свойств движения тел. Для этого прежде всего вводят понятие **системы отсчета (с.о.)**, включающей в себя тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор (часы) для измерения времени (рис. 1.2). Тогда положение тела в пространстве можно задать либо с помощью **радиус-вектора** $\vec{r}$**,** проведенного из начала координат в рассматриваемую точку (для точек 1 и 2 на рис.1.2 это вектора $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$), либо с помощью координат (x,y,z) – проекций вектора $\vec{r}$ на координатные оси

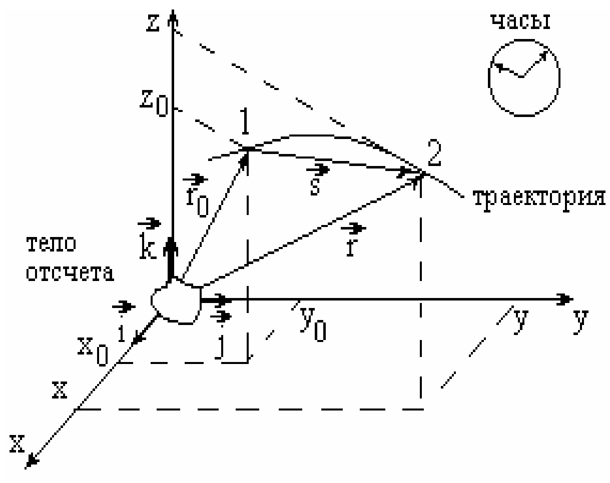


Рис.1.2

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , |\vec{i}\,|=|\vec{j}\,|=|\vec{k}\,| , \tag{1.1}$$

где вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - это вектора, указывающие направления осей Ox, Oy, Oz и равные по модулю единице.

1.1.1. Путь, перемещение, мгновенная скорость движения м.т.

Вектор $\vec{S}$, соединяющий начальное и конечное положение тела (точки 1 и 2 на рис.1.2), называют **перемещением.** Он связан с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ следующим равенством:

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0 . \tag{1.2}$$

Модуль перемещения меньше или равен **пути** ℓ - расстояния, пройденного телом по траектории, они совпадают в случае прямолинейного движения в одну сторону ($l=|\vec{S}|$).

Для практических целей необходимо определять быстроту движения тела, поэтому вводят **мгновенную скорость** $\vec{\upsilon}$ - скорость тела в данной точке траектории, равную первой производной от радиус-вектора $\vec{r}$ (или перемещения $\vec{S}$) по времени t

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.3}$$

Вектор $\vec{\upsilon}$ в каждой точке траектории направлен по касательной к ней (рис.1.3,а)

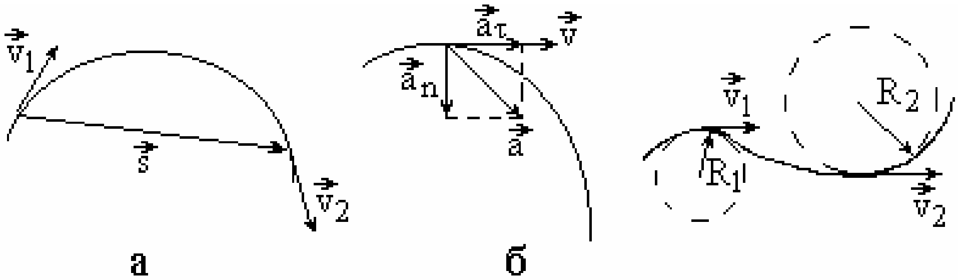


Рис.1.3

Широкое применение находит **средняя путевая скорость $\upsilon_{ср}$** - скалярная физическая величина, равная отношению пути, пройденного телом за время t, к этому времени t

$$\upsilon_{ср}=\ell/t \tag{1.4}$$

1.1.2. Мгновенное ускорение м.т. Касательное и нормальное ускорения м.т.

Быстроту изменения скорости оценивают, вводя понятие **мгновенного ускорения** $\vec{a}$ - ускорения в данной точке траектории, равного первой производной от скорости $\vec{\upsilon}$ по времени t или второй производной от радиус–вектора $\vec{r}$ (или перемещения $\vec{S}$) по времени t

$$\vec{a}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2\vec{S}}{dt^2} \tag{1.5}$$

Проекцию вектора ускорения $\vec{a}$ на направление касательной к траектории называют касательным (тангенциальным) ускорением $\vec{a}_\tau$, а на направление, перпендикулярное к касательной, – нормальным (центростремительным) ускорением $\vec{a}_n$

$$a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}; \qquad a_n=\frac{\upsilon^2}{R}; \tag{1.6}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n; \qquad a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}; \tag{1.7}$$

где υ - численное значение скорости; R - **радиус кривизны траектории** в данной ее точке, он равен радиусу окружности R, вписанной в малый участок траектории вблизи этой точки (рис.1.3,в).

Касательное ускорение характеризует изменение скорости тела по ее численной величине (по модулю скорости), а нормальное ускорение – по направлению.

Приведем вывод формул (1.6) для ускорений $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Для этого возьмем на траектории две близко расположенные точки 1 и 2, разделенные интервалом времени Δt (рис. 1.4), перенесем параллельно самому себе вектор $\vec{\upsilon}_2$ и отложим

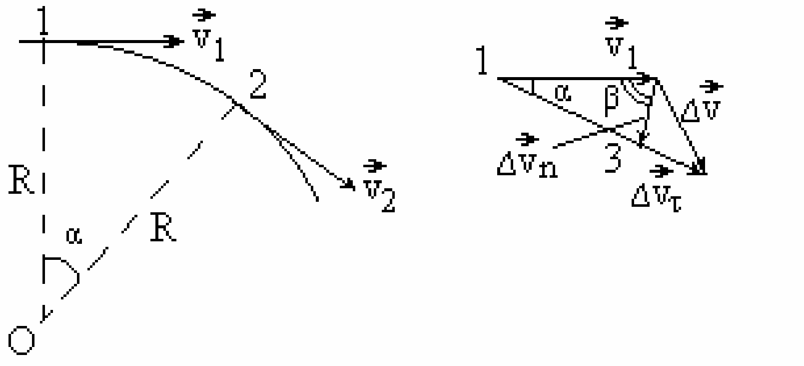


Рис.1.4

на нем отрезок, равный по модулю вектору $\vec{\upsilon}_1$ (рис. 1.4, точка 3). Тогда вектор $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$ можно представить в виде суммы двух векторов $\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n$. При $\Delta t \to 0$ углы α и β стремятся соответственно к 0^0 и 90^0, поэтому вектор $d\vec{\upsilon}_\tau$ будет направлен по касательной к траектории и будет характеризовать изменение числового значения скорости, а вектор $d\vec{\upsilon}_n$ будет перпендикулярен к $\vec{\upsilon}_1$. Следовательно,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \ ;$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{\upsilon}_\tau}{dt}, \qquad \vec{a}_n = \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt}. \tag{1.8}$$

Длина дуги и расстояние по прямой между точками 1 и 2 при малых $\Delta t \to dt$ будут равны $d\ell_{1,2} = dS_{1,2} = \upsilon dt$. Из подобия треугольников $\Delta 1O2$ и $\Delta 1\upsilon_1 3$ следует

$$\frac{d\upsilon_n}{\upsilon} = \frac{\upsilon dt}{R}, \qquad a_n = \frac{d\upsilon_n}{d} = \frac{\upsilon^2}{R},$$

что и было записано в формуле (1.6).

1.1.3. Схема решения основной задачи кинематики. Формулы для радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора скорости $\vec{\upsilon}$

Основной задачей кинематики является определение состояния м.т. (ее радиус-вектора $\vec{r}$ и скорости $\vec{\upsilon}$) в произвольный момент времени t. Для этого необходимо, задать, во-первых, начальные условия – радиус-вектор $\vec{r}_0$ и скорость $\vec{\upsilon}_0$ в начальный момент времени $t = t_0$ и, во-вторых, зависимость ускорения $\vec{a}$ от времени t. Тогда, используя понятия интеграла (см. приложение 1), для $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$ можно записать следующие выражения.

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}\,dt\ , \quad \int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{\upsilon} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt\ ;$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt \tag{1.9}$$

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}\,dt\ , \quad \int\limits_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{r} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}\,dt\ ;$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}\,dt = \vec{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[\vec{\upsilon}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt \right] dt\ . \tag{1.10}$$

Рассмотрим конкретный вид уравнений (1.9), (1.10) для некоторых частных случаев движений м.т.

1. Равнопеременное движение м.т. – это движение м.т. с постоянным ускорением ($\vec{a} = \mathrm{const}$). При выборе начального момента времени t_0 равным нулю, из выражений (1.9) и (1.10) получим

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}\,t\ , \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}\,t^2}{2}\ . \tag{1.11}$$

Формула (1.11) позволяет, например, описать движение брошенного под углом к горизонту тела без учета сил сопротивления воздуха ($\vec{a} = \vec{g}$), движение по параболической траектории.

Равнопеременное прямолинейное движение ($\vec{a}_n = 0,\ \vec{a} = \vec{a}_\tau$) будет наблюдаться в тех случаях, когда векторы ускорения $\vec{a}$ и начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$ будут либо параллельны друг к другу, либо направлены в противоположные стороны, либо вектор $\vec{\upsilon}_0$ будет равен нулю: $\vec{\upsilon}_0 = 0$. В этих случаях проекция уравнений (1.11) на ось Ох, направленную вдоль линии движения тела, приводит к следующим выражениям:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t\ , \quad x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}\ . \qquad (1.12)$$

Для пути ℓ и модуля скорости υ в случаях равноускоренного (знак “+”) и равнозамедленного (знак “-”) прямолинейных движений можно получить

$$\ell = |S_k| = \upsilon_0 t \pm \frac{a t^2}{2} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} t = \frac{|\upsilon^2 - \upsilon_0^2|}{2a}, \quad \upsilon = \upsilon_0 \pm at\ . \qquad (1.13)$$

На рис.1.5 приведены построенные по уравнениям (1.12) графики зависимости от времени t проекций на ось Ox скорости $\vec{\upsilon}$ (υ_x), перемещения $\vec{S}$ $(S_x = x - x_0)$ и радиус-вектора $\vec{r}$ (координата x) при заданных начальных значениях $\vec{r}_0 (x_0 > 0), \vec{\upsilon}_0 (\upsilon_{0x} > 0)$ и зависимости $\vec{a}$ (считается, что $a_x =$ const>0). Этот случай соответствует равноускоренному движению вдоль оси Ox.

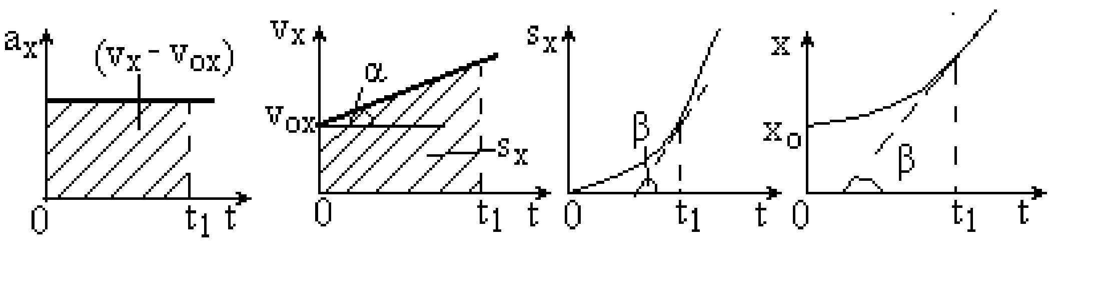


Рис.1.5

Как видно из рис. 1.5, площади под графиком $a_x(t)$ и $\upsilon_x(t)$ позволяют найти в определенный момент времени t_1 значения $(\upsilon_x - \upsilon_{0x})$ и S_x, а углы наклона α и β касательной к графикам $\upsilon_x(t), S_x(t)$ и $x(t)$ определяют проекцию ускорения a_x=tgβ и скорости υ_x=tgβ в этот момент времени t_1.

2. Равномерное движение м.т. по окружности радиуса R в плоскости xOy (начало координатных осей находится в центре окружности, рис.1.6). Задаем начальные условия при t = 0: $\vec{r}_0 = R\vec{i}$, $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \vec{j}$

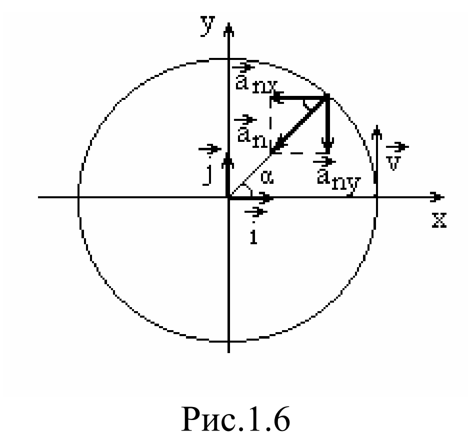


Рис.1.6

Для такого движения тангенциальное ускорение a_τ равно нулю, а зависимость нормального ускорения a_n от времени t определяется формулой

$$\vec{a}_n = |\vec{a}_n| (\cos(\frac{\upsilon_0}{R} t)\, \vec{i} + \sin(\frac{\upsilon_0}{R} t)\, \vec{j})\ ,$$

$$\left|\vec{a}_n\right| = \frac{\upsilon_0^2}{R}. \tag{1.14}$$

Действительно, для положения м.т., соответствующей углу α на рис.1.6, можно записать формулу для a_n через проекции на оси x и y

$$\vec{a}_n = \vec{a}_{nx} + \vec{a}_{ny},$$

причем

$$\vec{a}_{nx} = -a_n \cos\alpha\, \vec{i} \quad , \quad \vec{a}_{ny} = -a_n \sin\alpha\, \vec{j}$$

Длина дуги, ограниченная углом α, равна $l=\alpha R=v_0 t$, где t - время, за которое м.т. поворачивается на угол α. Тогда $\alpha = (\upsilon_0 t)/R$ и в итоге получается формула (1.14).

Подставляя начальные условия и выражения для $\vec{a}_n$ в формулы (1.9) и (1.10), получим

$$\vec{\upsilon} = -\upsilon_0 (\sin\frac{\upsilon_0}{R}t)\,\vec{i} - \cos(\frac{\upsilon_0}{R}t)\,\vec{j}) \quad , \quad \vec{r} = -\frac{R^2}{\upsilon_0^2}\vec{a}_n \quad . \tag{1.15}$$

Формулы (1.9) и (1.10) даже в простом случае равномерного вращения м.т. по окружности дают громоздкие выражения (1.15). Существенное упрощение описания вращательного движения м.т. возможно при введении новых характеристик – векторов углового перемещения $\vec{\varphi}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$.

1.1.4. Кинематические характеристики вращательного движения м.т. и а.т.т.

Пусть м.т. движется со скоростью $\vec{\upsilon}$ по окружности радиуса r вокруг неподвижной оси вращения (рис. 1.7,а). Материальную точку с осью вращения

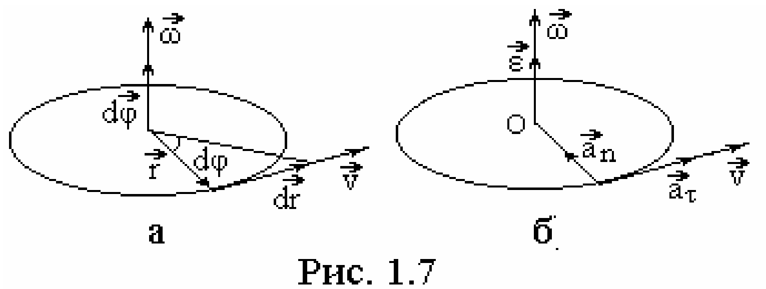


Рис. 1.7

соединяет перпендикулярный к ней вектор $\vec{r}$, а вектор его элементарного приращения, вектор $d\vec{r}$, направлен по касательной к окружности.

Введем понятие **вектора элементарного углового перемещения** $d\vec{\varphi}$**:** он равен по модулю углу элементарного поворота $d\varphi$, причем $d\varphi>0$; направлен вектор $d\vec{\varphi}$ по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика, а именно, направление вращения буравчика должно совпадать с направлением вращения м.т., тогда поступательное движение буравчика определяет направление вектора $d\vec{\varphi}$ (рис.1.7,а).

Быстроту вращения м.т. характеризует **угловая скорость** $\vec{\omega}$, равная первой производной от вектора углового перемещения $\vec{\varphi}$ по времени t

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.16}$$

Направления вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектора элементарного углового перемещения $d\vec{\varphi}$ совпадают.

Быстроту изменения угловой скорости характеризует вектор углового **ускорения** $\vec{\varepsilon}$, равный первой производной от угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени t

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{1.17}$$

В случае ускоренного вращения направления $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$совпадают (рис.1.7,б), для замедленного вращения вектора $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ направлены в противоположные стороны ($\vec{\varepsilon}\uparrow\downarrow\vec{\omega}$).

Кроме приведенных выше величин, для описания вращательного движения тела используют **частоту обращения n**, определяемую как число оборотов, совершаемых телом за единицу времени, и **период обращения Т** как время одного полного оборота. Справедливы следующие формулы взаимосвязи ω, n и T:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi / T. \tag{1.18}$$

Введенные характеристики вращательного движения м.т. применимы и для абсолютно твердого тела, так как его можно разбить на малые объемы и тем самым представить в виде совокупности м.т.

Если задать начальные условия ($t = t_0$: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0, \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$) и зависимость углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ от времени t, то тогда для векторов углового перемещения $\vec{\varphi}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ можно записать

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\omega}\, dt \quad , \ \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{\varepsilon}(t)\, dt \tag{1.19}$$

Для вращения тела с постоянным угловым ускорением формула (1.19) примет следующий вид ($t_0 = 0$):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}\, t, \ \ \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\varepsilon} t^2/2. \tag{1.20}$$

Для углового пути φ и модуля угловой скорости ω в случаях равноускоренного (знак “+”) и в случае равнозамедленного (знак “-”) вращения из (1.20) получаем (φ_0=0)

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon\, t^2}{2} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{\left|\omega^2 - \omega_0^2\right|}{2\varepsilon}\ , \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon\ t \tag{1.21}$$

Можно отметить, что формулы (1.21) переходят в формулы (1.13) при следующей замене $\varphi \to l$, $\omega \to \upsilon$, $\varepsilon \to a = a_\tau$. Этой аналогией можно пользоваться при записи формул для вращательного движения тел.

1.1.5. Формулы взаимосвязи линейных ($\vec{\upsilon}, \vec{a}_\tau, \vec{a}_n$) и угловых ($\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$) характеристик при вращательном движении

Пользуясь определением векторного произведения двух векторов (см. прил. 1) и рис 1.7,а можно записать

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi} \times \vec{r}\right]\ . \tag{1.22}$$

Выражение (1.22) позволяет получить следующие формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик: 1) **для скоростей** $\vec{\upsilon}$ **и** $\vec{\omega}$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\left[d\vec{\varphi} \times \vec{r}\right]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right] = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\ ,$$

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right], \qquad \upsilon = \omega r\ . \tag{1.23}$$

2) **для ускорений** $\vec{a}_\tau, \vec{a}_n$ **и** $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{v}\right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}\right] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\ ,$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right], \qquad a_\tau = \varepsilon r\ , \tag{1.24}$$

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}\right], \qquad a_n = \omega\,\upsilon = \frac{\upsilon^2}{R} = \varepsilon^2 R\ . \tag{1.25}$$

Направления векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ показаны на рис 1.7,б (ускоренное вращение м.т. - $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}$, $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$).

1.2. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ М.Т. И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ А.Т.Т.

Решение кинематических уравнений механического движения тела помимо начальных условий требует информации об ускорении тела. Ее можно получить, рассматривая механическое взаимодействие данного тела с другими телами, приводящее к изменению состояния тела, изменению его скорости, т.е. к возникновению ускорения. Вопросы, связанные с такими взаимодействиями, и рассматриваются в динамике.

1.2.1. Сила, инертность тела, масса тела

Для общности рассуждений механическое взаимодействие тела с другими телами описывают понятием **силы** $\vec{F}$**,** которая определяется как векторная физическая величина, характеризующая механическое взаимодействие данного тела с другими телами, приводящее к его деформации или к возникновению ускорения. Введение силы $\vec{F}$ позволяет количественно описать такие взаимодействия и выявить в них наиболее важные особенности. С учетом этого о взаимодействии данного тела с другими телами можно сказать так: на тело действует сила $\vec{F}$, которая сообщает ему ускорение $\vec{a}$ или деформирует его.

В механике для характеристики различных видов взаимодействия тел вводят следующие силы: тяготения $\vec{F}_{\text{т}}$(ее частным случаем является сила тяжести $m\vec{g}$), упругости $\vec{F}_y$, трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сопротивления $\vec{F}_c$, силу нормальной реакции опоры $\vec{N}$, вес тела $\vec{Q}$, силу натяжения $\vec{F}_{\text{н}}$ нити и т.д. Все они детально изучаются в школьном курсе физики и здесь не рассматриваются.

Далее, как показывает опыт, все тела изменяют свою скорость не мгновенно, а постепенно при их взаимодействии с другими телами, т.е. они обладают **инертностью**. Количественной характеристикой инертности тела является его **масса m**. Она определяется как мера инертности тела при его прямолинейном движении.

В качестве примера рассмотрим столкновение двух тел, массами m_1 и m_2, движущимися со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ ($\upsilon_2 > \upsilon_1$) по гладкой горизонтальной поверхности (отсутствуют силы трения) навстречу друг другу. Пусть в результате столкновения они останавливаются (рис. 1.8). Из такого столкновения следует, что первое тело является более инертным, чем второе тело, т.е. первое тело обладает большей массой ($m_1 > m_2$). Действительно, за время взаимодействия первое тело изменяет свою скорость на меньшую величину ($|\Delta\vec{\upsilon}_1| = |0 - \upsilon_1| < |\Delta\vec{\upsilon}_2| = \upsilon_2$), чем второе тело.

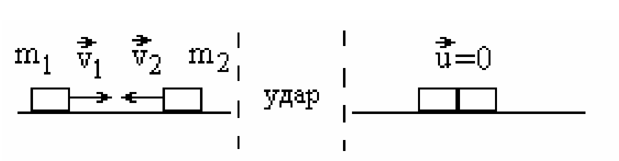


Рис.1.8

1.2.2. Законы Ньютона

В основе классической механики движения м.т. лежат три закона Ньютона, они не доказываются, они являются обобщением опытных фактов.

Первый закон Ньютона отвечает на вопрос: как движется тело в отсутствие его взаимодействия с другими телами? Ответ на этот вопрос не является очевидным, так как практически устранить взаимодействие тел невозможно (например, устранить силу трения), и поэтому до Галилея из опыта делался неправильный вывод: равномерное движение тела возможно только при воздействии на тело других тел. Например, если силу трения не устранить, то тело будет двигаться по горизонтальному столу с постоянной скоростью только при наличии внешней силы. Правильный вывод содержится в первом законе Ньютона, согласно которому *тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано*.

Оказывается, что первый закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета. Если выбрать С.О., связанную с поездом, движущимся равномерно и прямолинейно, то шарик, лежащий на гладком горизонтальном столе в купе вагона, будет покоиться, т.к. действующие на него силы тяжести и нормальной реакции опоры компенсируют друг друга. Однако, если поезд будет двигаться с ускорением, то без видимых причин шарик начнет двигаться относительно поезда, т.е. приобретет ускорение. Поэтому среди всех С.О. выделяют **инерциальные системы отсчета (ИСО)** как С.О., в которых выполняется первый закон Ньютона и соответственно второй и третий законы Ньютона.

ИСО в природе не существует, так как тела отсчета либо вращаются (С.О., связанная с Землей), либо движутся прямолинейно с ускорением. Наиболее близкой к ИСО можно считать С.О., связанную с Солнцем. Для многих физических явлений систему отсчета, связанную с Землей, также можно считать ИСО. В теоретическом плане ИСО существует бесконечное множество, все они движутся равномерно и прямолинейно, т.е. без ускорения, или покоятся.

Для формулировки второго закона Ньютон ввел понятие **импульса** $\vec{p}$ **тела** как ВФВ, характеризующую его прямолинейное движение и равную произведению массы тела на его скорость

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} . \qquad (1.26)$$

Второй закон Ньютона количественно описывает механическое взаимодействие тел, связывая между собой действующую на тело силу с изменением его импульса. Согласно этому закону *первая производная от импульса* $\vec{p}$ *тела по времени* t *равна векторной сумме сил, действующих на тело*,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \qquad (1.27)$$

Формула (1.27) позволяет рассматривать движение, при котором масса тела может изменяться (реактивное движение).

Если масса тела не зависит от времени, то тогда выражение (1.27) можно записать, вводя в него ускорение тела

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad (1.28)$$

и сформулировать **второй закон Ньютона** следующим образом: *произведение массы тела на его ускорение равно векторной сумме сил, действующих на тело.*

Можно отметить, что выражение (1.27) приводит в специальной теории относительности к релятивистски инвариантной формуле второго закона Ньютона, чего нельзя сказать о формуле (1.28). В релятивистской механике формула взаимосвязи между ускорением тела и действующей на него силой существенно усложняется.

Уравнение (1.27) и (1.28) позволяют при задании начальных условий (радиус-вектора $\vec{r}_0$ и импульса $\vec{p}_0$ тела при $t = t_0$) и сил, действующих на тело, решить основную задачу механики м.т.: описать ее механическое движение, т.е. однозначно определить состояние м.т. (ее радиус-вектор $\vec{r}$ и импульс $\vec{p}$) в последующие моменты t (схема решения задач приведена на рис. 1.9).

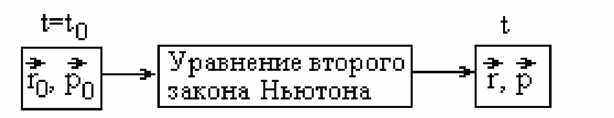


Рис.1.9

Третий закон Ньютона важен тем, что он устанавливает дополнительные связи между силами, возникающими при взаимодействии тел, и тем самым облегчает решение уравнений (1.27) и (1.28), т.е. решение задачи о механическом движении тел.

Согласно этому закону *силы, действующие между двумя телам и, равны по модулю и противоположны по направлению*

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \qquad (1.29)$$

На рис 1.10 приведены примеры сил, входящих в третий закон Ньютона. Эти силы приложены к разным телам, они одинаковой природы, это силы действия и противодействия.

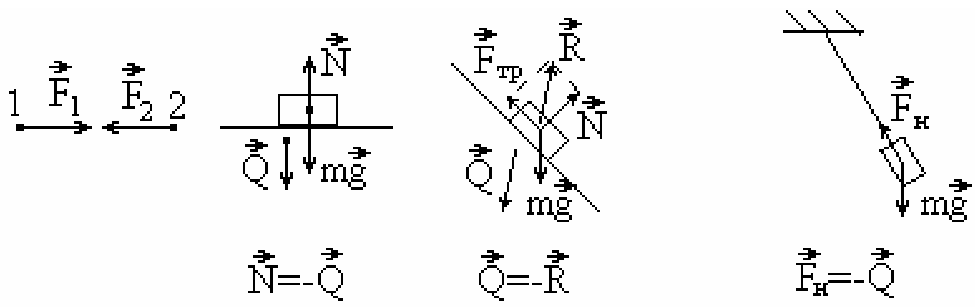


Рис.1.10

В заключение этого параграфа отметим, что, хотя задача описания механического движения тел решается на основе уравнений (1.27) и (1.28), ее практическая реализация сопряжена с большими сложностями. Так, в частности, во многих случаях не удается установить все силы, действующие на тело, а для известных сил установить их зависимость от координат и времени. К тому же задача о движении трех и более тел не имеет точного решения.

В связи с этим вводят дополнительные величины, такие как импульс $\vec{p}$, энергия W и момент импульса $\vec{L}$ тела. Оказывается, что для этих величин выполняются законы сохранения, которые позволяют, не решая уравнения второго закона Ньютона, получить неполную, но важную для практических целей информацию о движении взаимодействующих тел.

К тому же эти законы сохранения являются отражением установленных на опыте фундаментальных свойств пространства и времени как форм существования материи – однородности пространства (все точки пространства эквивалентны, равноправны; из чего следует закон сохранения импульса) и его изотропности (все направления в пространстве эквивалентны, равноправны, из чего вытекает закон сохранения момента импульса) и однородности времени (все моменты времени равноправны, что приводит к закону сохранения энергии).

Возможно и другое, принятое в теоретической физике построение классической механики, в котором постулируются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса и на их основе выводятся законы Ньютона. Но это не меняет сути дела, так как и в том, и в другом случае в основе механики лежат законы, являющиеся следствием опытных фактов.

1.2.3. Закон сохранения импульса

Докажем закон сохранения импульса. Для этого рассмотрим систему, состоящую из N тел (на рис.1.11 для простоты приведена система из трех тел - м.т).

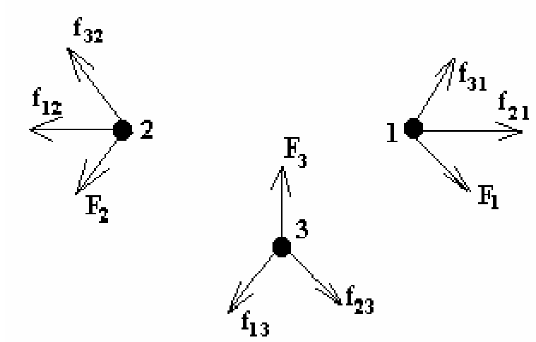


Рис.1.11

На каждое тело системы действуют внешние силы $\vec{F}_i$ $(i=1,...,N)$ со стороны не входящих в эту систему тел (м.т.), и внутренние силы $\vec{f}_{ik}$ $(i,k=1,...,N)$ со стороны других тел системы. Внутренние силы системы связаны между собой третьим законом Ньютона

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}. \tag{1.30}$$

Запишем уравнения второго закона Ньютона (1.27) для всех тел системы и затем сложим эти уравнения

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k\neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_{0i}, \quad i=1,...,N \quad ;$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2+...+\vec{p}_N) = \sum_{i=1}^{N}(\sum_{k\neq i}\vec{f}_{ik}+\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k\neq 1}\vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i .$$

Векторная сумма всех внутренних сил с учетом (1.30) равна нулю и поэтому

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_C = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i , \tag{1.31}$$

где введен импульс $\vec{p}_C$ системы как векторная сумма импульсов тел системы

$$\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N . \tag{1.32}$$

Итак, согласно (1.31) векторная сумма импульсов тел системы (или импульс системы) изменяется за счет действия внешних сил.

Если взять **замкнутую систему**, т.е. систему, на которую не действуют внешние силы ($\vec{F}_i = 0$), то тогда выполняется **закон сохранения импульса**, согласно которому *векторная сумма импульсов тел замкнутой системы остается постоянной или импульс $\vec{p}_C$ замкнутой системы остается постоянным.*

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N = \text{const}, \qquad \vec{p}_c = \text{const}. \qquad (1.33)$$

Реально выделить замкнутую систему достаточно трудно. Но и в незамкнутых системах в ряде случаев можно использовать закон сохранения импульса. Перечислим их. **1. Внешние силы компенсируют друг друга**. Такую систему, например, составляют рассмотренные в §1.2.1 два тела, движущиеся по гладкой горизонтальной поверхности (отсутствуют силы трения) навстречу друг другу (рис.1.8). В этом случае внешние силы – силы тяжести $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ компенсируют друг друга, а возникающие при столкновении тел внутренние силы, силы деформации, не могут изменить импульс системы $\vec{p}_C = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = 0$. Из этого следует, что $m_1/m_2 = \upsilon_2/\upsilon_1$, т.е. из закона сохранения импульса можно количественно оценить соотношение масс этих тел, их инертность. **2. Внешние силы не компенсируют друг друга, но их проекция на какую-либо ось остается равной нулю**. Хотя импульс системы изменяется, но его проекция на эту ось сохраняется. Примером такой системы является система, состоящая из двух тел, одно из которых движется по гладкой поверхности со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, а другое падает вертикально вниз со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ и испытывает абсолютно неупругое столкновение с первым телом. В результате этого они движутся с одинаковой скоростью $\vec{u}$, образуя единое целое (рис.1.12).

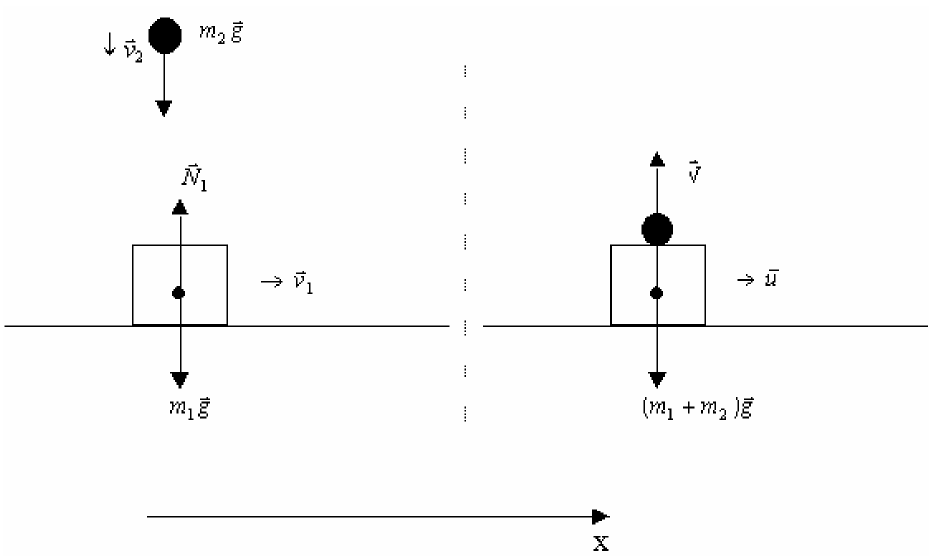


Рис.1.12

Сумма внешних сил до удара ($m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} = m_2\vec{g}$), во время удара и после удара ($\vec{N} + (m_1 + m_2)\vec{g} = 0$) изменяется, но их проекция на ось Ox остается все время равной нулю и поэтому $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\ u$. Такие системы называются квазизамкнутыми. **3. Внешние силы значительно меньше по модулю внутренних сил, действующих между телами в системе** ($F_i << f_{ik}$). Это наблюдается при сильных кратковременных взаимодействиях: удар, выстрел, разрыв снаряда и т.д. В этих случаях изменение импульса каждого тела системы, в основном, определяется внутренними силами системы

$$d\vec{p}_i = (\sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i)dt = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} dt \quad . \tag{1.34}$$

1.2.4. Центр масс системы. Центр масс и центр тяжести а.т.т.

Под **центром масс системы** понимают точку пространства, положение которой относительно какой-либо ИСО определяется радиус-вектором $\vec{r}_c$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i \ , \qquad m = \sum_i m_i \ , \tag{1.35}$$

где m – сумма масс тел (материальных точек) системы; $\vec{r}_i$ - радиус-вектор i – го тела (м.т.) системы.

Если поместить в центр масс тело в виде материальной точки массы m, то оно будет двигаться со скоростью $\vec{\upsilon}_c$, равной

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{\upsilon}_i}{m} = \frac{\vec{p}_c}{m} \quad . \tag{1.36}$$

Если подставить в выражение (1.36) формулу (1.31)

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = m\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i \ , \tag{1.37}$$

то тогда можно сказать, что **центр масс системы** - это точка пространства, к которой приложены все силы, вызывающие по отдельности поступательное движение системы. Поэтому поступательное движение системы можно моделировать движением тела в виде м.т. массы m , помещенного в центре масс системы. Этот прием является удобным при изучении такого движения системы.

Если система является замкнутой или внешние силы, действующие на нее, компенсируют друг друга, то ее центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно или покоиться. Поэтому в ИСО, связанной с ним, проще описать движение тел системы.

В качестве примера рассмотрим систему двух неподвижных тел массами m_1 *и* m_2 ($m_2 = 2m_1$), скрепленных между собой сжатой в начальный момент времени пружиной. Эти тела могут скользить без трения по гладкой горизонтальной поверхности (рис.1.13)

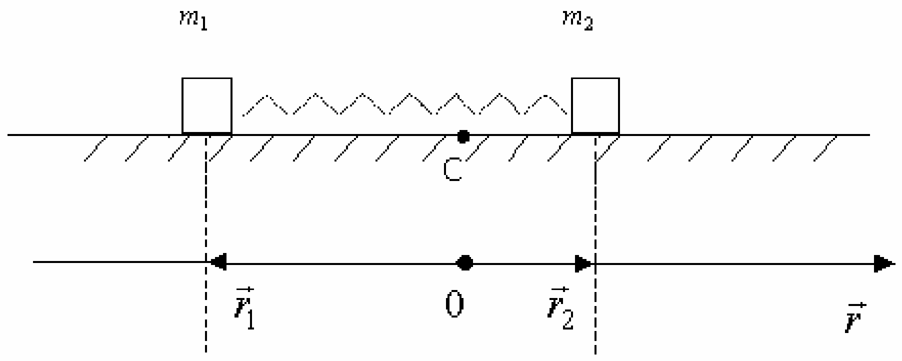


Рис.1.13

Начало оси $\vec{r}$, точка О, совпадает с центром масс системы (точкой С), т.е. $\vec{r}_c = 0$. Положение тел в начальный момент времени определится векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, связанными между собой соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 = -2\vec{r}_2 \quad .$$

Если пружину отпустить, то за счет действия внутренних сил системы (силы упругости) тела приходят в движение, скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ будут все время изменяться, но положения центра масс остается при этом неизменным, а импульс системы будет равным нулю

$$\vec{p}_c = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = 0 \Rightarrow \vec{\upsilon}_1 = -2\vec{\upsilon}_2 .$$

Соотношения между радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ($\vec{r}_1 = -2\vec{r}_2$) и векторами $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ сохраняются при движении тел.

Введенное выше понятие центра масс системы включает в себя как частный случай понятия центра масс и для абсолютно твердого тела. Действительно а.т.т. можно разбить на малые объемы dV и представить в виде совокупности м.т., между которыми действуют внутренние силы. Отличием для а.т.т. является тот факт, что расстояния между м.т. этого тела остаются со временем неизменными. Размеры объемов dV (м.т.) нужно выбирать такими, чтобы можно было пренебречь дискретным (атомным) строением вещества, т.е. эти объемы должны содержать достаточное количество одинаковых по свойствам атомов.

Центр масс а.т.т. совпадает с его центром тяжести, но является более общим понятием, справедливым и в отсутствие внешних гравитационных полей. Положение центра масс а.т.т. можно найти экспериментально, определяя положение его центра тяжести (см. параграф 1.3.3).

1.3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.3.1. Момент импульса м.т. и а.т.т. относительно оси вращения

Моментом импульса м.т. массы m, движущейся со скоростью $\vec{V}$ относительно оси вращения, называют вектор $\vec{L}$, определяемый по формуле

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \qquad L = rp\sin\alpha = rp, \tag{1.38}$$

где $\vec{p}$ - импульс м.т.; $\vec{r}$ - вектор, соединяющий м.т. с осью вращения и перпендикулярный к этой оси (рис.1.14,а). Направлен вектор $\vec{L}$ по оси вращения.

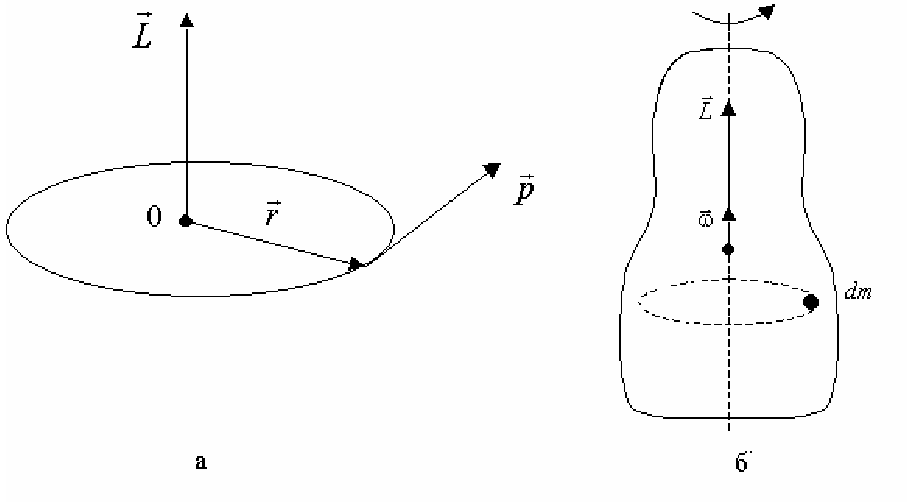


Рис.1.14

Запишем модуль момента импульса $\vec{L}$ в другом виде

$$L = rp = rmv = rm\,\omega\, r = (mr^2)\,\omega = I\omega, \tag{1.39}$$

где введена величина I , называемая **моментом инерции м.т. относительно оси вращения**

$$I = mr^2 \tag{1.40}$$

Для а.т.т. объема V, представляющего собой совокупность м.т. массы dm, модуль момента импульса относительно оси вращения запишется так

$$L = \int_V dL = \int_V dmr^2\omega = \omega\int_V dmr^2 = I\omega \;,$$

где величина

$$I = \int_V dmr^2 \tag{1.41}$$

представляет собой **момент инерции а.т.т. относительно оси вращения**. В случае однородного симметричного относительно оси вращения тела (это такое тело, которое при любом повороте вокруг оси вращения совмещается само с собой) направления векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают (рис.1.14,б) и поэтому

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} \qquad (1.42)$$

Для произвольного а.т.т. момент импульса $\vec{L}$ определится формулой

$$\vec{L} = \int_V d\vec{L} = \int_V dm\,[\vec{r}\times\vec{\upsilon}], \qquad (1.43)$$

из которой следует, что в общем случае вектора $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не параллельны и поэтому вектор $\vec{L}$ не будет направлен вдоль си вращения.

1.3.2. Момент силы относительно оси вращения. Основной закон динамики вращательного движения

Пусть к материальной точке массы m приложена сила $\vec{F}$; ее составляющая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, обозначена как $\vec{F}_\perp$. Тогда **моментом силы** $\vec{F}$ **относительно оси вращения** называют вектор, определяемый формулой

$$\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{F}], \;\; M = rF_\perp \sin\alpha = F_\perp d, \;\; \alpha = (\vec{r}, \vec{F}_\perp), \qquad (1.44)$$

где $\vec{r}$ - это вектор, проведенный от оси вращения к м.т. (рис.1.15, ось вращения проходит через точку О перпендикулярно к вектору $\vec{r}$); $d = r\sin\alpha$ - **плечо силы** – кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения; вектор $\vec{M}$ направлен вдоль оси вращения.

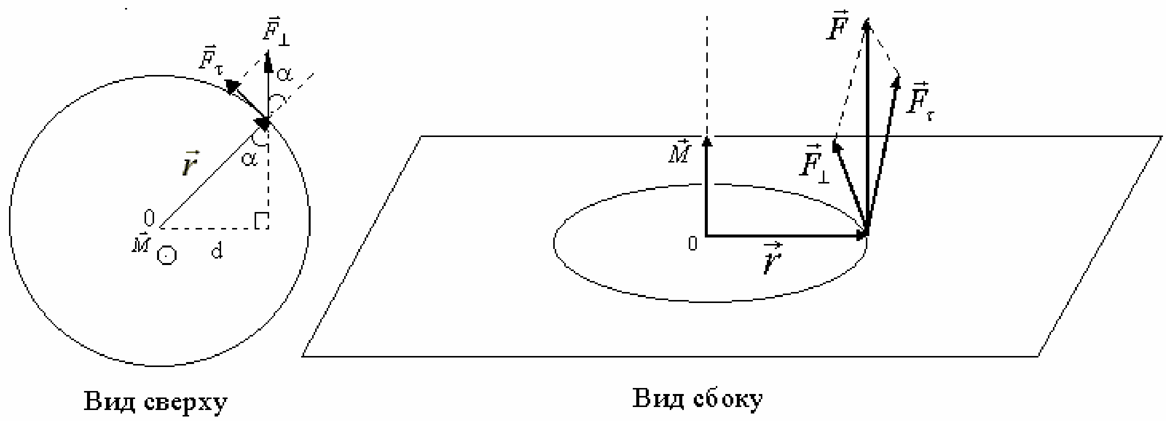


Рис.1.15

Запишем другое выражение для модуля вектора $\vec{M}$, используя проекцию силы $\vec{F}_\perp$ на направление касательной к окружности (она обозначена $\vec{F}_\tau$, см. рис 1.15); именно $\vec{F}_\tau$ и вызывает вращательное движение м.т.

$$M = rF_\perp \sin\alpha = rF_\tau = rma_\tau = rm\varepsilon\, r = mr^2\varepsilon = I\varepsilon \qquad (1.45)$$

Для абсолютно твердого тела, представляющего собой совокупность м.т. массы dm, помимо векторной суммы моментов внешних сил $\vec{M}$, действующих на его м.т., между м.т. этого тела действуют также и внутренние силы, векторная сумма моментов $\vec{M}_{ik}$ которых относительно оси вращения согласно третьему закону Ньютона равна нулю, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k(\neq i)}^{N} \vec{M}_{i\,k} = 0 \;;$$

$$\vec{M} = \int_V d\vec{M} = \int_V dmr^2\,\vec{\varepsilon} = I\,\vec{\varepsilon} \quad .$$

В итоге можно записать **основной закон динамики вращательного движения для а.т.т.**

$$I\,\vec{\varepsilon} = \vec{M}\,, \qquad (1.46)$$

который формулируется следующим образом: *произведение момента инерции тела относительно оси вращения на вектор углового ускорения равно векторной сумме момента действующих на тело внешних сил относительно этой оси вращения.*

Основной закон динамики вращательного движения (1.46) можно записать в другом виде

$$I\,\vec{\varepsilon} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\,\vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad ,$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad . \qquad (1.47)$$

Согласно (1.47) *производная по времени от вектора момента импульса тела относительно оси вращения равна векторной сумме моментов, действующих на а.т.т. внешних сил относительно этой оси вращения.*

Напомним, что момент инерции для а.т.т. не может быть изменен внутренними силами системы (I = const), чего нельзя сказать для системы, состоящей из нескольких а.т.т. (возникающие при этом эффекты будут рассмотрены дальше),

Уравнения (1.46) и (1.47) позволяют при задании начальных условий ($t = t_0 : \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0, \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$) и действующих на а.т.т. моментов внешних сил относительно оси вращения решать задачи динамики вращательного движения а.т.т.

Отметим, что в общем случае тело может совершать вращательное движение относительно неподвижной точки (ось вращения, проходящая через эту точку может менять свое направление в пространстве). Описание такого движения является более сложным, оно требует введения понятий момента импульса и момента силы относительно этой точки и поэтому здесь не рассматриваются.

1.3.3. Момент инерции а.т.т. относительно оси вращения

Момент инерции а.т.т. (формула (1.41)) является мерой инерции тела при его вращательном движении. Он зависит не только от массы m, но и от ее распределения относительно оси вращения.

Обычно момент инерции тела рассматривают относительно осей, проходящих через его **центр тяжести**. Поэтому, прежде всего, выясним, как можно найти его для произвольного тела. Для этого воспользуемся следующим свойством центра тяжести тела: через него проходят оси вращения, относительно которых векторная сумма моментов сил тяжести, действующих на разные части тела, равна нулю.

Рассмотрим в качестве примера сплошной однородный цилиндр. Будем подвешивать цилиндр за разные точки, лежащие на его поверхности, и проводить через них вертикальные линии (рис. 1.16). Тогда в точке их пересечения будет находиться центр тяжести цилиндра (она обозначена утолщенной точкой внутри цилиндра). Такую методику можно применять и для произвольного тела.

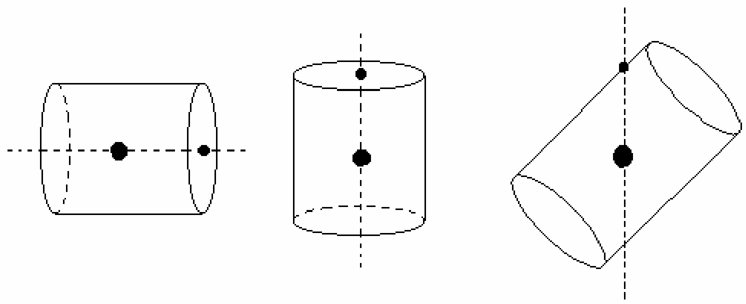


Рис.1.16

Приведем формулы для моментов инерции I тел правильной геометрической формы относительно оси вращения OO_1, проходящей через их центр тяжести так, как показано на рис.1.17.

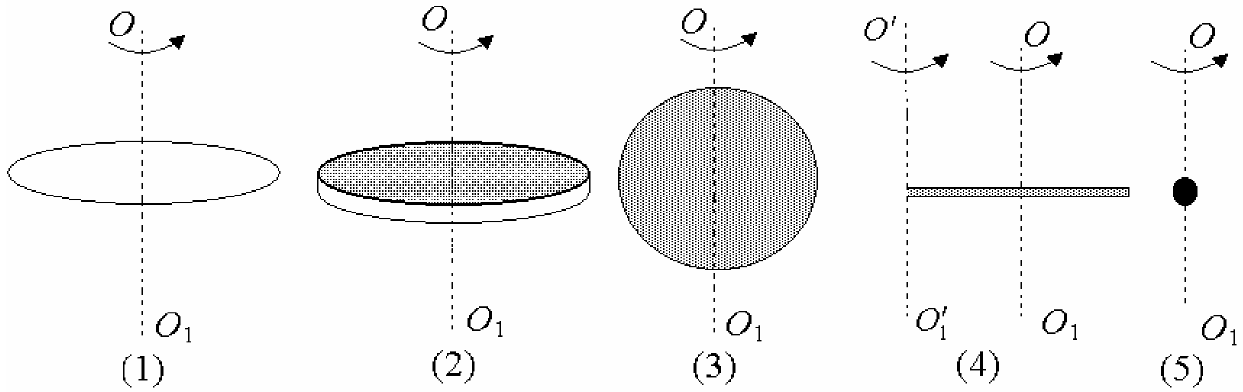


Рис.1.17

1. Обруч (или тонкостенный цилиндр) массы m и радиуса r

$$I=\int_V dmr^2=r^2\int_V dm=mr^2 \quad . \qquad (1.48)$$

2. Сплошной однородный диск (или цилиндр) массы m, радиуса R и высоты h

$$I=\int_V dmr^2=\int_V \rho\, dVr^2=\int_V \rho 2\pi rhdrr^2=2\pi\rho h\frac{R^4}{4}=\left[\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\pi R^2 h}\right]=\frac{1}{2}mr^2 , \qquad (1.49)$$

где ρ – плотность материала диска, dV=$2\pi rhdr$- элементарный объем тела, выбираемый в виде кольцевого слоя радиуса r толщиной dr и высоты h.

3. Однородный шар массы m и радиуса r

$$I=\frac{2}{5}mr^2 \quad . \qquad (1.50)$$

4.Тонкий однородный стержень массы m и длины ℓ

$$I=\frac{1}{12}m\ell^2. \qquad (1.51)$$

5. Материальная точка массы m

$$I = 0 ,$$

так как $r = 0$.

Для расчета момента инерции тела относительно произвольной оси вращения можно воспользоваться формулой **теоремы Штейнера**

$$I'=I+ma^2 , \qquad (1.52)$$

где I, I' - моменты инерции тела массы m относительно оси, проходящий через центр масс тела (I) и параллельной ей произвольной оси (I'), отстоящей от нее на расстоянии a.

Так, для оси O',O_1', проходящей через один из концов тонкого стержня (рис.1.17) можно получить

$$I' = I + m(\frac{\ell}{2})^2 = (\frac{1}{12} + \frac{1}{4})m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 \qquad (1.53)$$

Покажем справедливость теоремы Штейнера на примере тела, состоящего из двух м.т. массы m_1 и m_2, скрепленных невесомым стержнем . Положение центра тяжести такого тела (точка О) найдем, приравняв нулю векторную сумму моментов сил тяжести, действующих на м.т. 1 и 2, относительно оси вращения, проходящей через точку О (ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа рис.1.18)

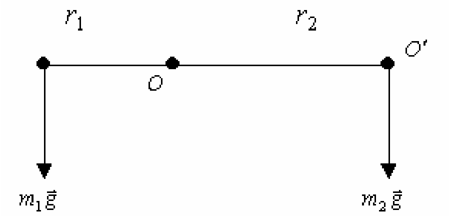


Рис.1.18

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0 \quad , M_1 - M_2 = m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = 0, \quad m_2 = m_1 r_1 / r_2 .$$

Согласно определению моменты инерции для данного тела относительно осей вращения, проходящих через точки О (I) и О '(I'), запишутся таким образом:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad , \quad I' = m_1 (r_1 + r_2)^2 .$$

Найдем теперь I' по теореме Штейнера и сопоставим с написанным выше выражение для I'

$$I' = I + (m_1 + m_2) r_2^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + (m_1 + m_2) r_2^2 = m_1 r_1^2 + m_1 \frac{r_1}{r_2} r_2^2 + m_1 r_1^2 + m_1 \frac{r_1}{r_2} r_2^2 =$$

$$= m_1 (r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2) = m_1 (r_1 + r_2)^2,$$

что и требовалось показать.

1.3.4. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему, состоящую из N взаимодействующих между собой материальных точек, вращающихся вокруг какой-либо оси. Запишем для каждой м.т. основное уравнение динамики вращательного движения (1.47), выделяя отдельно моменты внешних $\vec{M}$ и внутренних $\vec{M}_{ik}$ сил.

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k(\neq i)} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i \quad , \qquad (1.54)$$

где i – номер м.т. (i = 1,…,N)

Просуммируем уравнения (1.54) по всем м.т. системы, введем момент импульса $\vec{L}$ системы и учтем что согласно третьему закону Ньютона векторная сумма моментов внутренних сил, действующих на м.т., относительно оси вращения, равна нулю

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \,, \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{i(\neq k)} \vec{M}_{ik} = 0 \,.$$

Тогда (1.54) перепишется так

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=0}^{N} \vec{M}_i \,. \tag{1.55}$$

Из формулы (1.55) следует **закон сохранения момента импульса**, *согласно которому момент импульса замкнутой системы остается постоянным относительно любой оси вращения*

$$\sum_{i=0}^{N} \vec{M}_i = 0 \,, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \,, \quad \vec{L} = \text{const} \tag{1.56}$$

или, используя формулу (1.42),

$$\sum_i I_i \vec{\omega}_i = const \,, \tag{1.57}$$

где I_i, ω_i – момент инерции и угловая скорость вращения i – й м.т. системы.

При вращательном движении, как и при поступательном, общая масса тел замкнутой системы остается постоянной, но при вращательном движении внутренние силы могут изменить распределение массы относительно оси вращения, т.е. моменты инерции тел системы. Это при неизменном моменте импульса замкнутой системы приводит к изменению угловой скорости вращения входящих в нее тел.

Приведем ряд примеров, подтверждающих это явление. Учтем, что во всех этих примерах моменты внешних сил (силы тяжести, реакции опоры) относительно вертикальной оси вращения равны нулю и поэтому момент импульса системы остается постоянным.

Пример 1. При переходе человека (м.т.) массы m_1 в центр платформы (однородный диск радиуса R) массы m_2 угловая скорость вращения платформы увеличивается (рис. 1.19,а, б).

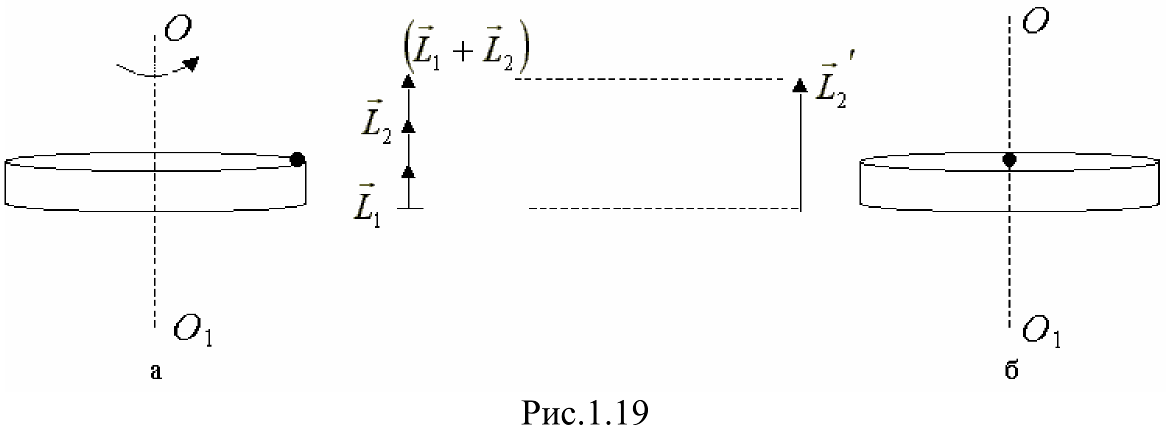


Рис.1.19

$$\vec{L}_i + \vec{L}_2 = \vec{L}_2^{/}: \ (m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2)\omega_1 = \frac{1}{2}m_2R^2\omega_2 \ , \omega_2 = \omega_1(m_2 + 2m_1)/m_2 \ , \ \ \omega_2 > \omega_1 .$$

Пример 2. При вращении фигуристки изменение положения ее рук приводит к изменению момента инерции фигуристки относительно вертикальной оси вращения и соответственно к изменению угловой скорости ее вращения

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \ : \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 .$$

Если фигуристка прижимает руки к телу, то тем самым она уменьшает свой момент инерции ($I_2<I_1$) и увеличивает угловую скорость вращения:

$$\omega_2 = \omega_1(I_1/I_2) > \omega_1.$$

Пример 3. Скамья Жуковского. Человек стоит на скамье (их общий момент инерции относительно оси вращения равен I_1) и держит в руках колесо (его момент инерции I_2), способное вращаться вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью вращения скамьи (рис. 1.20). Человек приводит во вращение колесо с угловой скоростью ω_2. Тогда он со скамьей начнет вращаться в противоположную сторону с угловой скоростью ω_1.

$$0 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2', L_1' = L_2' \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \ , \quad \omega_1 = \omega_2 I_2/I_1 .$$

В этом опыте моменты инерции тел системы не изменяются, но внутренние силы совершают работу по изменению угловой скорости вращения входящих в систему тел.

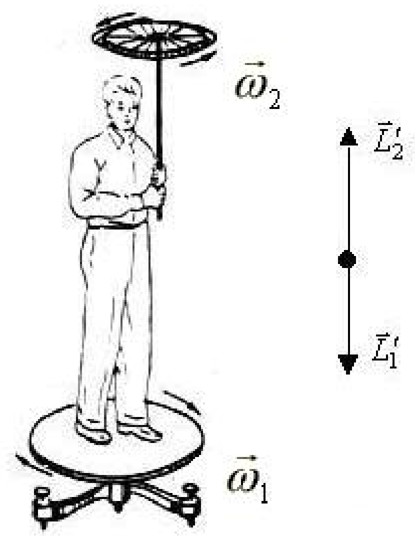


Рис.1.20

1.3.5.* Гироскопы

Под гироскопом понимают быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого (ось симметрии) может произвольно изменять свое положение в пространстве. Например, гироскопами являются детский волчок и массивный диск, закрепленный так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг трех взаимно перпендикулярных осей AA_1, BB_1 и CC_1 (рис.1.21,а).

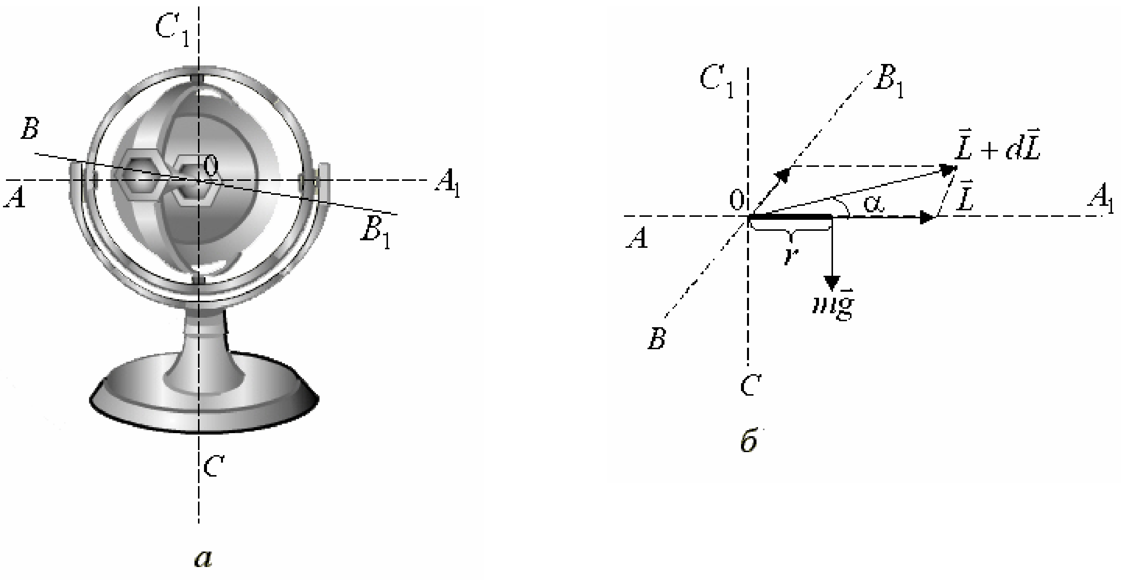


Рис.1.21

Применяемые в технике гироскопы обычно являются уравновешенными, т.е. их центры тяжести совпадают с центром подвеса (точка О) и поэтому моменты сил тяжести, действующих на них относительно любой оси вращения, равны нулю. В этом случае гироскоп можно рассматривать как замкнутую систему, для которой выполняется закон сохранения момента импульса.

Если раскрутить диск вокруг оси AA_1 с большой угловой скоростью ω, то возникающий при этом момент импульса $\vec{L}$, направленный вдоль оси вращения AA_1 (рис.1.21,б), будет сохранять свое положение в пространстве и соответственно сохраняет свое направление и ось вращения. Так, например, при повороте подставки, на которой укреплен гироскоп, в ту или иную сторону, положение оси AA_1 останется неизменным из-за того, что момент внешних сил относительно осей вращения будет равен нулю.

Оказывается, что направление оси AA_1 практически не изменится и при кратковременных внешних воздействиях, при которых момент внешних сил относительно какой-либо оси будет отличным от нуля. Пусть на гироскоп в течение малого промежутка времени t будет действовать сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная на расстоянии r от точки O (рис.1.21,б). Она создаст момент силы $\overrightarrow{M}$, направленный вдоль оси BB_1, и согласно уравнению (1.48) приведет к приращению вектора момента импульса $\vec{L}: \Delta\vec{L} = \overrightarrow{M}\Delta t$. Вследствие этого ось вращения изменит свое положение в пространстве и установится вдоль нового направления вектора $(\vec{L}+\Delta\vec{L})$. Из-за малого времени действия внешней силы и большого модуля вектора $\vec{L}$ $(\vec{L} >> \Delta\vec{L})$ направление оси AA_1 в пространстве практически не изменится.

Этот факт сохранения первоначального направления оси вращения гироскопа при любых его перемещениях и случайных кратковременных воздействиях используется в различных навигационных приборах, в которых фиксируется определенное направление оси вращения в пространстве (вертикальное направление, направление на северный географический полюс Земли и т.д.), относительно которого затем и определяется направление движения объекта и, по мере необходимости, корректируется его курс и местоположение.

Если внешняя сила будет действовать постоянно, то тогда поворот оси AA_1 будет происходить вслед за поворотом вектора $\vec{L}$ и гироскоп будет вращаться вокруг оси CC_1 с угловой скоростью ω_n, говорят, он будет совершать прецессию.

Кажущаяся на первый взгляд возможность поворота гироскопа вокруг оси BB_1 под действием силы $m\vec{g}$ опровергается основным уравнением динамики вращательного движения (1.48).

Оценим угловую скорость ω_n прецессии. Так, из рис.1.21,б при малом значении угла α можно записать:

$$tg\alpha \approx \alpha = \omega_n \Delta t = \frac{M\Delta t}{L}, \qquad \omega_n = \frac{M}{L} = \frac{mg\upsilon}{I\omega}, \qquad \omega_n = \frac{mg\upsilon}{I\omega}, \tag{1.58}$$

где I –момент инерции гироскопа; ω – угловая скорость его вращения вокруг оси AA_1.

При винтовой нарезке ствола ружья или орудия такое движение (прецессию) совершает пуля или снаряд вокруг оси вращения, направленной в каждый момент времени по скорости их движения, т.е. по касательной к траектории. Это увеличивает дальность и устойчивость полета пули и снаряда, способствует попаданию их в цель лобовой частью, увеличивает точность попадания ввиду отсутствия кувыркания пули и снаряда при их полете.

1.3.6. Условия равновесия а.т.т. Таблица аналогий между линейными и угловыми характеристиками при поступательном и вращательном движениях

Из рассмотренных выше поступательного и вращательного движений а.т.т. можно сделать вывод о том, что оно будет находиться относительно ИСО в равновесии, т.е. либо покоиться, либо двигаться равномерно и прямолинейно в соответствии с движением его центра масс и одновременно вращаться с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через него, при выполнении следующих равенств:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \ , \ \sum_{i=`}^{N} \vec{M}_i = 0 \, . \tag{1.59}$$

Итак, а.т.т. находится в состоянии равновесия, когда векторная сумма внешних сил, действующих на тело, равна нулю и векторная сумма моментов этих сил относительно оси вращения тоже равна нулю.

В заключение этого раздела приведем таблицу аналогий между характеристиками вращательного и поступательного движений тела. Она позволяет на основе известных формул поступательного движения достаточно легко записывать формулы для вращательного движения, видеть взаимосвязь между этими видами движения и способствует более успешному усвоению материала.

Таблица 1

Прямолинейное движение	Вращательное движение	Формулы связи между модулями линейных и угловых характеристик
Путь l	Угловой путь φ	l=φr, r-радиус окружности
Элементарное перемещение $d\vec{r}$	Элементарное угловое перемещение $d\vec{\varphi}$	dr=rdφ
Линейная скорость $\vec{\upsilon}$	Угловая скорость $\vec{\omega}$	υ=ωr
Тангенциальное ускорение $\vec{a_\tau}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$	$a_\tau=\varepsilon\, r$
Масса тела m	Момент инерции I	$I=\int\limits_\upsilon dmr^2$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$	$M=rF\sin\alpha=rF_\tau$
Импульс $\vec{p}$	Момент импульса тела $\vec{L}$	L=rp
–	Нормальное ускорение $\vec{a_n}$	$a_n=\upsilon^2/r$

В качестве примера использования таблицы аналогий запишем ряд формул:

$$l=\upsilon_0 t\pm\frac{at^2}{2},\quad \upsilon=\upsilon_0\pm at \quad\Rightarrow\quad \varphi=\omega_0 t\pm\frac{\varepsilon\, t^2}{2},\quad \omega=\omega_0\pm\varepsilon\, t;$$

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon}\quad\Rightarrow\quad \vec{L}=I\vec{\varepsilon};$$

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{d\vec{p}}{dt}\quad\Rightarrow\quad \vec{M}=I\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{L}}{dt};$$

$$dA=\vec{F}d\vec{r}=m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}=m\upsilon d\upsilon\quad\Rightarrow\quad dA=\vec{M}d\vec{\varphi}=I\vec{\omega}d\vec{\omega}=I\omega d\omega;$$

$$W_k=\frac{m\upsilon^2}{2},\quad\Rightarrow\quad W_k=\frac{I\omega^2}{2}.$$

1.4. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

Понятия энергии и работы можно рассматривать с различных точек зрения, выявляя при этом существенные аспекты их взаимосвязи с различными физическими понятиями и процессами. Наиболее общий подход связывает их с материей и ее движением. Все, что нас окружает, называют материей. Она существует в непрерывном движении, непрерывно происходят взаимные превращения различных форм ее движения (в частности, механической, тепловой, электромагнитной, ядерной и т.д.) друг в друга. Количественной мерой различных форм движения материи является энергия, а их взаимных превращений - работа.

Из неуничтожимости движения следует тот факт, что суммарная энергия всех форм движения материи в замкнутой системе не исчезает и не возникает из ничего.

В механике изменение механической энергии связано с взаимодействием тел, с работой сил, действующих на тело. Понятие работы играет важную роль в жизни человека, являясь количественной мерой производимых им усилий на обеспечение своей жизнедеятельности.

1.4.1. Работа силы. Кинетическая энергия тела. Теорема о кинетической энергии

Под элементарной работой dA, совершаемой силой $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{s}$, называют величину, равную скалярному произведению $\vec{F}$ на $d\vec{s}$

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = F\left|d\vec{s}\right|\cos\alpha = F_S dl, \qquad (1.60)$$

где угол α - угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещением $d\vec{s}$ (рис.1.22,а);

$\left|d\vec{s}\right|$ - модуль вектора элементарного перемещения или элементарный путь $d\vec{l}$ **пройденной точкой приложения силы.**

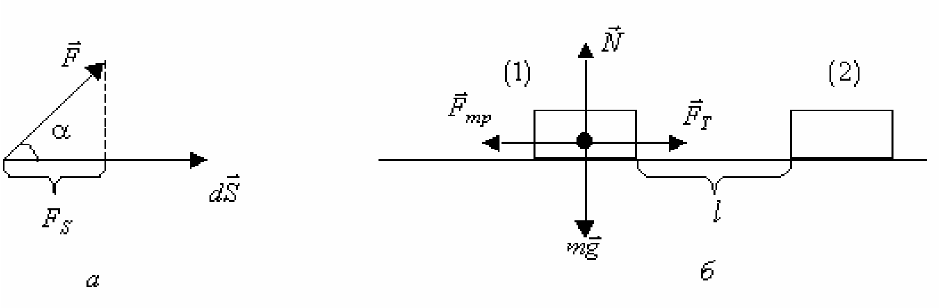


Рис.1.22

Работа силы на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} \quad . \qquad (1.61)$$

Если сила постоянна ($\vec{F}$=const), то ее работа на прямолинейном участке длины l запишется следующим образом:

$$A_{12} = F\, l \cos\alpha\,. \tag{1.62}$$

Работа силы может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Так, работы постоянных сил, приложенных к телу (рис.1.22б) на горизонтальном участке пути l, равны:

$$A_N = A_{mg} = 0, \qquad A_{mp} = -F_{mp}\, l, \qquad A_F = F\, l$$

Чтобы ввести понятие о кинетической энергии W_k тела, запишем элементарную работу dA силы $\vec{F}$ в другом виде (см. 1.2.2):

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon}(d\vec{\upsilon}_{\perp} + d\vec{\upsilon}_{\mathrm{II}}) = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}_{\perp} + m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}_{\mathrm{II}} = m\upsilon d\upsilon\,. \tag{1.63}$$

Тогда для работы силы $\vec{F}$, переводящей тело из состояния 1 (скорость тела $\vec{\upsilon}_1$) в состояние 2 (скорость тела $\vec{\upsilon}_2$) можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon\, d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k\,.$$

Из полученной формулы следует, что работа силы равна разности двух величин, определяющих начальное (скорость $\vec{\upsilon}_1$) и конечное (скорость $\vec{\upsilon}_2$) состояния тела. При этом условия перехода из состояния 1 в состояние 2 не оказывают влияние на записанное выражение. Поэтому можно ввести функцию состояния тела, его кинетическую энергию $W_к$ как *СФВ, характеризующую способность тела совершать работу за счет изменения скорости его движения и равную*

$$W_K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \mathrm{const.}$$

В этом выражении постоянную выбирают, предположив, что при нулевой скорости движения тела его кинетическая энергия равна нулю, поэтому

$$W_K = \frac{m\upsilon^2}{2}\,. \tag{1.64}$$

Кинетическая энергия тел не зависит от того, как была достигнута данная скорость υ, она является функцией состояния тела, положительной величиной, зависящей от выбора системы отсчета.

Введение $W_к$ позволяет сформулировать теорему о кинетической энергии, согласно которой алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии тела:

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots = \Delta W_k\,, \qquad \sum_i dA_i = dW_k\,. \tag{1.65}$$

Эта теорема широко используется для анализа взаимодействия тел не только в механике, но и в других разделах курса физики, таких как электростатика, постоянный ток, электромагнетизм, колебания и волны и т.д.

1.4.2. Кинетическая энергия вращающегося а.т.т.

Возьмем а.т.т., вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис.1.16,б). Представим тело в виде совокупности м.т. массы *dm*, тогда для кинетической энергии тела можно записать:

$$W_k = \int dW_K = \int \frac{dm\upsilon^2}{2} = \int \frac{dm\omega^2 r^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\int_V dmr^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

Итак, кинетическая энергия а.т.т. вращающегося относительно неподвижной оси вращения, определяется по формуле

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2} \quad . \qquad (1.66)$$

Если тело одновременно участвует в поступательном (плоском) и вращательном движениях (например, движение цилиндра без скольжения по плоскости, рис.1.23,а), то его кинетическую энергию можно получить

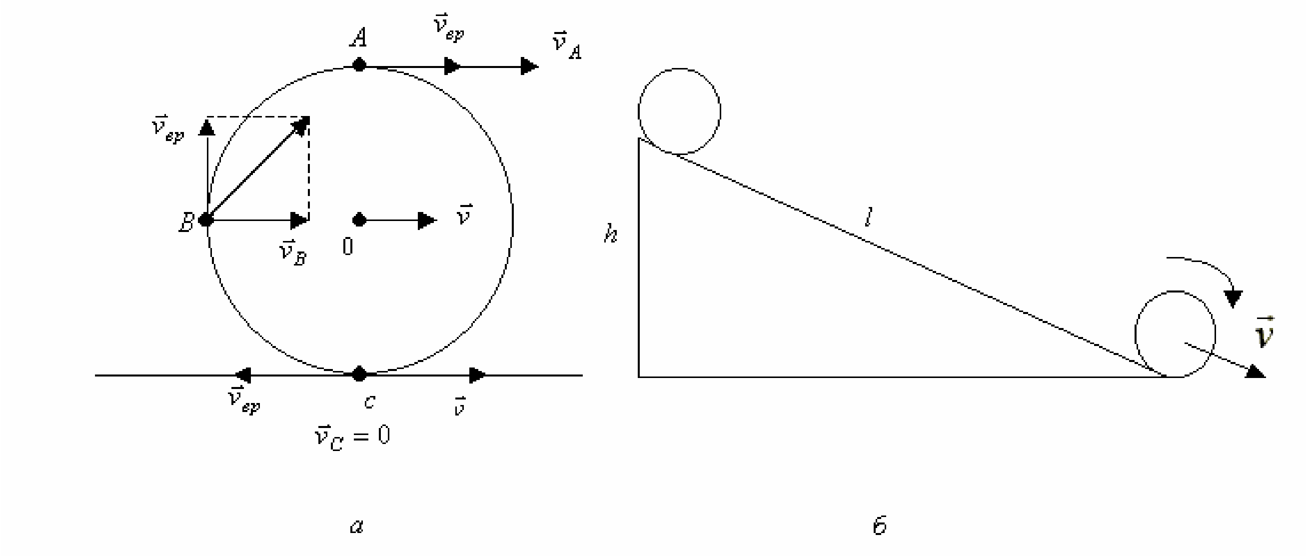


Рис.1.23

как сумму кинетической энергии поступательного движения тела вместе с осью вращения, проходящей через его центр масс (точка *O*), со скоростью $\vec{\upsilon}$ и вращательного движения тела относительно этой оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \ . \qquad (1.67)$$

Для сплошного (I_1=1/2mR^2) и тонкостенного (I_2=mR^2) цилиндров одинаковой массы *m* и радиуса *R* кинетические энергии запишутся таким образом:

$$W_{K1} = \frac{3m\upsilon^2}{4}, \qquad W_{k2} = m\upsilon^2 .$$

Полученные формулы для кинетической энергии цилиндров позволяют объяснить опыт по различию времени их скатывания с наклонной плоскости высотой h и длиной l (рис.1.23,б). Так, согласно закону сохранения энергии (силой трения при движении цилиндров практически можно пренебречь) получим

$$mgh = \frac{3m\upsilon_1^{\ 2}}{4} = m\upsilon_2^{\ 2} \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_2 > \upsilon_1 ,$$

где υ_1, υ_2 – скорости сплошного и полого цилиндров у основания наклонной плоскости.

При скатывании цилиндров центр их масс движется равноускоренно без начальной скорости и поэтому согласно формуле (1.13) можно записать:

$$l = \frac{\upsilon_1 t_1}{2} = \frac{\upsilon_2 t_2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 > t_1 ,$$

т.е. на скатывание полого цилиндра требуется большее время, чем для сплошного цилиндра.

Качественно это можно объяснить тем, что полый цилиндр является более инертным, чем сплошной (для него момент инерции относительно оси вращения больше), и поэтому он медленнее изменяет свою скорость и поэтому тратит больше времени на скатывание с наклонной плоскости.

Как видно из рис.1.23,а, модули скоростей точек на поверхности цилиндра будут разными *($\upsilon_B=0$, $\upsilon_C = \sqrt{2}\ \upsilon$, $\upsilon_A=2\upsilon$)* в связи с тем, что эти точки участвуют одновременно в поступательном и вращательном движениях со скоростями $\vec{\upsilon}_{ПОСТ} = \vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}_{ВР}$, причем $\vec{\upsilon}_{ВР}$ для каждой точки направлена по касательной к поверхности цилиндра и равна по модулю υ **(**$\vec{\upsilon}_{ОБЩ} = \vec{\upsilon}_{ПОСТ} + \vec{\upsilon}_{ВР} = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{ВР}$**).**

Отметим, что движение цилиндра можно рассматривать и как ряд последовательных вращений вокруг мгновенной оси, проходящей через точку C (рис.1.23,а) с угловой скоростью ω. Причем и в этом случае кинетическая энергия тела также определяется формулой (1.67).

1.4.3. Работа внешних сил по вращению а.т.т.

Запишем формулу для элементарной работы силы $\vec{F}$ по вращению тела вокруг неподвижной оси вращения (рис.1.15, формула (1.45)):

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = F_\tau r d\varphi\cos\alpha = Md\varphi\cos\alpha = I\varepsilon\ d\varphi = I\frac{d\omega}{dt}d\varphi =$$

$$= I\frac{d\varphi}{dt}\omega = I\omega\ d\omega, \tag{1.68}$$

$$dA = \vec{M}d\vec{\varphi} = I\vec{\omega}\ d\vec{\omega} = I\omega\ d\omega,$$

где угол α=0, 180 ^{0} в зависимости от направления векторов $\vec{M}$ и $d\vec{\varphi}$ (α=0: $\vec{M} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$ ускоренное вращение; α=180^0: $\vec{M} \uparrow\downarrow d\vec{\varphi}$ замедленное вращение).

Работа внешних сил по изменению угловой скорости от ω_1 до ω_2 на конечном угловом перемещении $\Delta\varphi=(\varphi-\varphi_0)$ определится так:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \; d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k \; . \qquad (1.69)$$

Формула (1.69) представляет собой теорему о кинетической энергии в случае вращательного движения тела.

1.4.4. Потенциальная энергия взаимодействующих тел. Терема о потенциальной энергии

Под **потенциальной энергией** W_p взаимодействующих тел или частей одного тела понимают СФВ, характеризующую их способность совершать работу за счет изменения взаимного расположения тел или частей одного тела. Потенциальная энергия в одинаковой степени характеризует все взаимодействующие тела или их части. При этом между ними действуют **консервативные силы**, *работа этих сил не зависит от траектории движения тел, но определяется их начальными и конечными положениями*.

При наличии только консервативных сил потенциальную энергию взаимодействия системы, состоящей из N тел (м.т.), можно представить в виде потенциальных энергий попарного их взаимодействия друг с другом и с внешними телами (с номерами от $(N+1)$ до $(N+L)$):

$$W_{PC} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1(k\neq i)}^{N} W_{Pik} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=N+1}^{N+L} W_{Pik} \; , \qquad (1.70)$$

где W_{Pik} - потенциальная энергия взаимодействия i-го и $к$-го тел. Коэффициент (1/2) в первом слагаемом связан с тем, что потенциальная энергия взаимодействия тел i и $к$ встречается здесь два раза (например, $W_{p_{12}}$ и $W_{p_{21}}$) и в ней исключаются слагаемые с $i=к$. Для замкнутой системы второго слагаемого, описывающего взаимодействие тел системы с внешними телами, в формуле (1.70) не будет.

Потенциальные взаимодействия принято обычно описывать введением силового поля, а именно, считается, что одно тело взаимодействует в месте своего расположения с силовым полем, созданным другими телами. Такой подход удобно использовать в том случае, когда движение одного тела (например, первого) слабо влияет на движение другого тела (второго). Тогда можно считать, что первое тело находится в потенциальном поле, созданном вторым телом, и потенциальную энергию их взаимодействия приписать первому телу. Так, например, говорят о потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли, о потенциальной энергии заряда в электрическом поле и т.д. При этом движение тела (заряда) слабо влияет на силовое поле, в котором оно движется. Вспомним, что обычно говорят: тело падает на Землю, а не Земля падает на тело. Этим самым отмечают тот факт, что движение тела практически не изменяет положение Земли.

Примерами консервативных сил в механике являются силы тяготения и упругости, а неконсервативных сил - силы трения, сопротивления, тяги, силы химических реакций, возникающих при разрыве снаряда, при выстреле и т.д.

Название «консервативные» силы связано с тем, что полная механическая энергия W_M системы тел, взаимодействующих между собой посредством только консервативных сил, сохраняется.

Выведем формулы для потенциальных энергий взаимодействия тел, между которыми действуют силы тяготения и силы упругости.

1. Потенциальная энергия тела в поле тяготения Земли. Между телом (м.т.) массы m и Землей (однородный шар радиуса $R_З$) массы $M_З$ действует сила тяготения:

$$F_T = G\frac{mM_З}{r^2}, \qquad r \geq R_З,$$

где G – гравитационная постоянная, а r – расстояние от центра Земли до тела (рис.1.24,а).

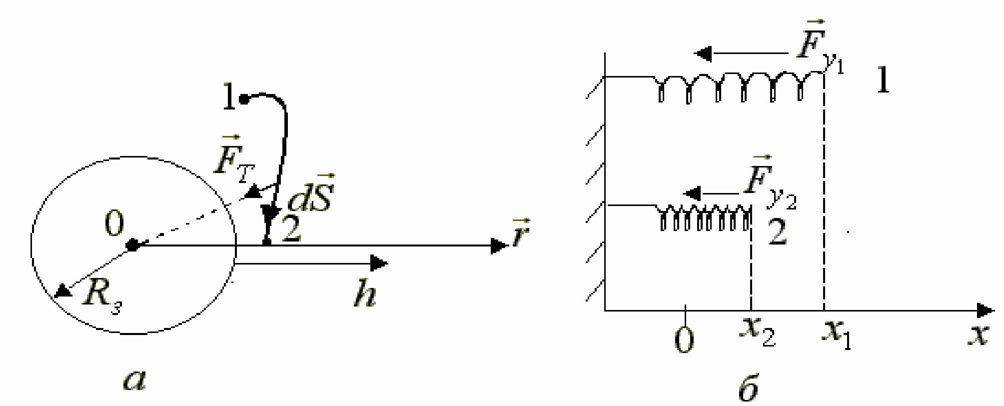


Рис.1.24

Рассчитаем работу A_{12} силы тяготения при переходе тела из точки 1 в точку 2, находящихся соответственно на расстояниях r_1 и r_2 от центра Земли:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} = \int_1^2 F_T|d\vec{r}|\cos\alpha = \int_1^2 F_T|dr| = -\int_1^2 Fdr = -GmM_з\int_1^2 \frac{dr}{r^2} =$$

$$= (-\frac{GmM_З}{r_1}) - (-\frac{GmM_З}{r_2}) \ . \qquad (1.71)$$

Из формулы (1.71) следует, что работа силы тяготения определяется убылью величин, зависящих только от начального и конечного положения тела и Земли. Значит, силы тяготения являются консервативными силами**,** а сами эти величины представляют собой потенциальные энергии гравитационного взаимодействия тела и Земли:

$$W_p = -G\frac{mM_З}{r} + \text{const}\,. \qquad (1.72)$$

Потенциальная энергия W_p определяется с точностью до постоянной величины; ее нулевой уровень отсчета W_p выбирается произвольно для удобства решения конкретных задач. Можно этот выбор провести следующим образом: считать, что при $r \to \infty$ $W_p \to 0$

$$W_p = -G\frac{mM_З}{r} \quad , \quad r \geq R_З \quad .$$

(1.73)

Как уже отмечалось выше, формулу (1.72) можно так же рассматривать как потенциальную энергию тела в гравитационном поле, созданном Землей. В этом случае нулевой уровень отсчета W_p удобно выбирать на поверхности Земли ($h=0$, $W_p=0$)

$$W_p = G\frac{mM_З}{R_З r}\left(r - R_З\right) = mg_0 h\frac{R_З}{R_З + h} = \vdots h << R_З \vdots = mg_0 h, \qquad h \geq 0\,, \qquad (1.74)$$

где $g_0 = GM_З/R_З^2 = 9{,}81$ м/с^2 - ускорение свободного падения на уровне океана ($h = 0$, $r = R_З$); h - высота тела над поверхностью Земли.

2. Потенциальная энергия упругодеформированного тела.

Рассмотрим работу силы упругости при сжатии пружины из состояния 1 до состояния 2 (рис.1.24б) с координатами x_1 и x_2 соответственно

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_y \left|d\vec{s}\right| \cos\alpha = -\int_{x_1}^{x_2} F_y dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \qquad (1.75)$$

Из (1.75) следует, что сила упругости является консервативной силой, а величина $W_p = \frac{kx^2}{2}$ является суммарной взаимной потенциальной энергией всех частей упругодеформированного тела (см. формулу (1.70)).

Обобщая формулы (1.71) и (1.75), можно сформулировать **теорему о потенциальной энергии**: *работа консервативных сил, действующих между телами или частями одного тела равна убыли их взаимной потенциальной энергии.*

Для тела, движение которого слабо влияет на движение другого тела, создающего силовое поле, **теорему о потенциальной энергии** можно сформулировать так: *работа консервативных сил, действующих на тело, равна убыли потенциальной энергии тела в поле этих сил*:

$$\sum_i dA_{КОНС} = -\Delta W_P, \quad dA_{КОНС} = -dW_P. \tag{1.76}$$

1.4.5. Формула связи потенциальной энергии W_p и консервативной силы $\vec{F}_K$

Между консервативной силой $\vec{F}_K$, действующей между телами, и потенциальной энергией их взаимодействия W_p существуют определенные формулы взаимосвязи, установим их. Для этого распишем выражение для элементарной работы консервативной силы вдоль произвольного направления $\vec{r}$ ($|d\vec{s}| = |d\vec{r}| = dr > 0$) и подставим его в теорему о потенциальной энергии (1.76). Тогда

$$dA_{КОНС} = F_{Kr}dr = -dW_p,$$

$$F_{Kr} = -\frac{dW_P}{dr}. \tag{1.77}$$

Выбирая направление $\vec{r}$, совпадающим с направлениями координатных осей, можно оценить проекции силы $\vec{F}$ на эти оси и тем самым записать формулу взаимосвязи вектора силы $\vec{F}_K$ и потенциальной энергии W_P:

$$F_X = -\frac{\partial W_P}{\partial x}, \qquad F_Y = -\frac{\partial W_P}{dy}, \qquad F_Z = -\frac{\partial W_P}{\partial z},$$

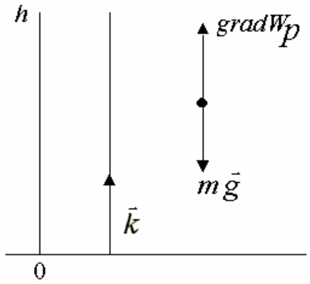
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

$$F_k = -gradW_p = -\nabla W_p, \qquad |gradW_p| = |\nabla W_p| = \frac{dW_p}{dl}. \tag{1.78}$$

Направление градиента потенциальной энергии в данной точке пространства в формуле (1.78) обозначено как $\vec{l}$.

Итак, согласно выражению (1.78) консервативная сила, действующая между телами, в каждой точке пространства равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии взаимодействия этих тел.

Проверим полученную формулу (1.78) для поля тяготения Земли (h<<$R_З$, $\vec{F}_T = m\vec{g}_0$, рис.1.25). Из формулы (1.74) следует



$$W_p = mg_0h = mg_oz,$$

$$gradW_p = \frac{\partial}{\partial z}(mg_0z)\vec{k} = mg_0\vec{k},$$

$$\vec{F}_k = m\vec{g}_0 = -mg_0\vec{k} \Rightarrow \vec{F}_k = -gradW_p,$$

что и требовалось показать.

Рис.1.25

1.4.6. Механическая энергия системы тел. Закон сохранения механической энергии

Полной механической энергией $W_м$ системы тел называют сумму кинетической энергии тел и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$W_M = W_k + W_p. \tag{1.79}$$

Как уже отмечалось во введении к главе 1.4, для замкнутой системы из факта неуничтожимости движения материи справедлив закон сохранения всех видов энергий (механической, тепловой, электромагнитной, ядерной и т.д.)

$$W_M + W_{тепл} + W_{эл} + W_{яд} + \ldots = \text{const} . \tag{1.80}$$

В такой системе механическая энергия может изменяться за счет работы неконсервативных сил: они переводят ее в другие виды энергии (механическая энергия уменьшается, происходит ее диссипация, рассеяние), и, наоборот, другие виды энергии переходят в механическую энергию (она возрастает).

Покажем это, используя теоремы о кинетической (1.65) и потенциальной (1.76) энергиях

$$\Delta W_M = \Delta(W_k + W_p) = \Delta W_k + \Delta W_p = (A_{коон} + A_{неконс}) + (-A_{конс}) = A_{неконс},$$

$$\Delta W_M = A_{неконс}. \tag{1.81}$$

Среди всех неконсервативных сил выделяют **диссипативные силы** – это силы, которые приводят к уменьшению механической энергии системы. К ним, например, относят силы трения и сопротивления. Так, например, шарик, катящийся по горизонтальной поверхности, с течением времени останавливается из-за того, что работа силы трения переводит часть его механической энергии в тепловую энергию

$$\Delta W_м = \Delta W_k + \Delta W_p = \Delta W_k = A_{тр} = -F_{тр} l < 0 .$$

Если же в замкнутой системе действуют только консервативные силы (такая система называется **замкнутой консервативной системой** – з.к.с.), то тогда в ней выполняется **закон сохранения механической энергии**, который гласит: *механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной*

$$з.к.с.: \quad W_M = \text{const} \tag{1.82}$$

Если такая система, между телами которой действуют только консервативные силы, находится во внешнем поле консервативных сил (открытая консервативная система - о.к.с.), то и для нее выполняется закон сохранения механической энергии

$$\textit{о.к.с.}: W_M = \text{const} \qquad (1.83)$$

Это связано с тем, что, потенциальная энергия системы является суммой попарных потенциальных энергий взаимодействий тел друг с другом (формула (1.70)) независимо от того входят эти тела в состав системы или нет, и поэтому теорема о потенциальной энергии (1.76) будет справедлива и в этом случае.

Так, например, падение тела из состояния покоя в поле тяготения Земли в отсутствие сил сопротивления воздуха можно рассматривать в открытой консервативной системе, включающей в себя только падающее тело (тогда падение тела происходит во внешнем силовом поле, созданном Землей, и тело обладает потенциальной энергией в этом поле) или в замкнутой консервативной системе, включающей в себя тело и Землю.

Можно отметить, что формула, связывающая изменения механической энергии замкнутой системы с работой внутренних неконсервативных сил (1.81), применима и для вращательного движения. Например, при вращении фигуристки ее момент импульса относительно вертикальной оси вращения остается постоянным ($\vec{L} = \text{const}$), а момент инерции зависит от положения ее рук (I изменяется), и поэтому ее кинетическая энергия

$$W_K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$$

будет изменяться за счет работы неконсервативных внутренних сил системы.

1.4.7. Потенциальные кривые

Обсудим кратко значение записанных выше формул (1.77) и (1.78). В квантовой механике при изучении движения частиц малой массы (микрочастиц) вместо действующих на них сил задают потенциальную энергию частиц во внешнем потенциальном поле (говорят, задают вид потенциального поля), в котором они движутся. График зависимости потенциальной энергии частицы от координат называют **потенциальной кривой**. Использование выражений (1.77) и (1.78) позволяет на основе заданного вида потенциальной кривой изучать характер движения и взаимодействия частиц и тем самым предлагать модели объяснения различных физических свойств веществ.

В качестве примера на рис.1.26 приведена потенциальная кривая взаимодействия двух частиц (молекул) в зависимости от расстояния

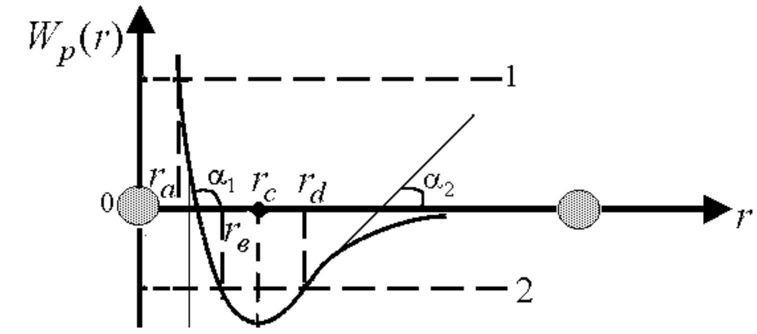


Рис. 1.26

между ними – одна частица закреплена в начале оси r (r=0) и считается неподвижной, а другая – на расстоянии r от нее. Тогда согласно формуле (1.77) проекция результирующей силы на ось r в какой-либо точке оси r будет равна тангенсу угла наклона касательной к графику $W_P(r)$: $F_{kr} = -tg\alpha$.

В первом случае (рис.1.26) полная механическая энергия частицы является положительной, что соответствует движению частицы в реальных газах. Как видно из рис.1.26, движение частицы будет поступательным от одного столкновения до другого. На расстояниях $r > r_c$ действующая на частицу результирующая сила будет силой притяжения ($r = r_d$, $F_{kr} = -tg\alpha_2 < 0$), а при $r<r_c$ – силой отталкивания ($r = r_a$, $F_{kr} = -tg\alpha_1 > 0$). При $r=r_a$ механическая энергия частицы будет равна ее потенциальной энергии, т.е. кинетическая энергия частицы обращается в ноль и частица испытывает столкновение с другой частицей, в результате чего она меняет направление своего движения. Говорят, частица налетает на потенциальный барьер и отражается, отскакивает от него.

Во втором случае полная механическая энергия частицы отрицательна, и, как следует из рис.1.26, в жидкостях и твердых телах частица совершает колебательное движение в ограниченной области пространства ($r_b \le r \le r_d$,), в потенциальной яме, созданной взаимодействием частиц. Расстояние $r=r_c$ соответствует положению устойчивого равновесия (потенциальная энергия частицы будет наименьшей). Движение частицы вдоль оси r от $r=r_b$ за счет сил отталкивания будет ускоренным ($F_{kr} = -tg\alpha \ > 0$), оно переходит в замедленное движение при $r>r_c$ за счет сил притяжения. Точкам $r=r_b$ и $r=r_d$ соответствуют точки поворота в движении частицы.

При увеличении температуры жидкости или твердого тела полная механическая энергия частицы возрастает, амплитуда ее колебаний увеличивается и за счет несимметричности потенциальной кривой происходит тепловое расширение жидкостей и твердых тел.

Задавая различные виды потенциальных кривых, например, для электронов в твердом теле, можно прийти к хорошо известным моделям описания электронного газа – модель свободных электронов, приближения сильной и слабой связи, которые широко используются для объяснения различных свойств веществ.

1.4.8. Применение законов сохранения импульса и механической энергии к анализу абсолютно упругого и неупругого столкновений

Как уже отмечалось ранее, законы сохранения позволяют получить важную информацию о взаимодействии тел без детального решения второго закона Ньютона. Рассмотрим ряд важных для практики примеров.

1. Абсолютно неупругий удар – это удар, в результате которого тела после соударения движутся вместе как единое целое. Пусть движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ тело массы m_1 сталкивается с движущимся со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ телом массы m_2, в результате чего их скорость оказывается равной $\vec{u}$ (рис.1.27)

Рис.1.27

Если эти тела образуют замкнутую систему, то для нее можно записать закон сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

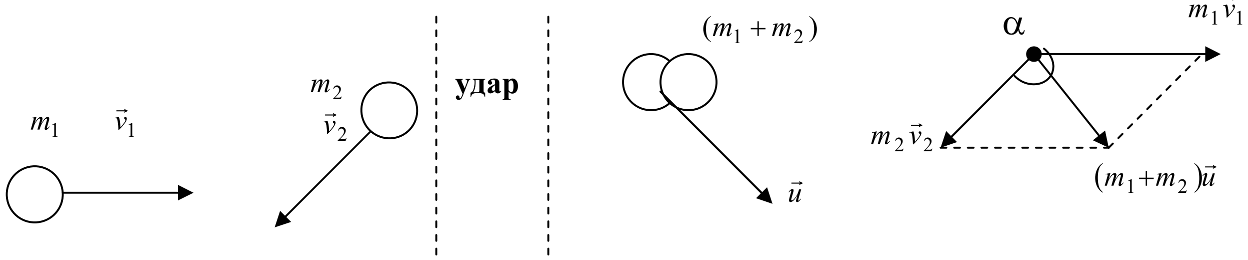
из которого следует, что скорость $\vec{u}$ тел после удара будет равна:

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}, \qquad u = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2 + 2m_1m_2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha}\,. \quad (1.84)$$

При таком ударе возникают неконсервативные силы (силы сопротивления), которые переводят часть механической энергии соударяющихся тел в тепловую энергию

$$A_{СОПР} = \Delta W_M = \Delta W_K = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} =$$

$$= -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha), \qquad (1.85)$$



где угол α в выражениях (1.84) и (1.85) – угол между векторами $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$.

В качестве примера рассмотрим взаимодействие молота (масса m_1, скорость его в момент удара $\vec{\upsilon}_1$) и наковальни (масса $m_2 >> m_1$, $\vec{\upsilon}_2 = 0$) при ковке куска металла. Из формул (1.84) и (1.85) получим

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}, \quad A_{сопр} = \Delta W_M = -\frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)},$$

$$\eta = \frac{|\Delta W_M|}{W_{M1}} = \frac{|A_{сопр}|}{W_{M1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1.86)$$

Как следует из выражения (1.86), КПД η удара тем выше, чем больше различие в массах наковальни и молота. В этом случае большая доля механической энергии молота переходит во внутреннюю энергию куска металла, идет на его деформацию.

2. Абсолютно упругий центральный удар – это удар, при котором помимо закона сохранения импульса, выполняется также и закон сохранения механической энергии. При таком ударе деформации тел, возникающие в момент соударения, после столкновения полностью исчезают. При центральном ударе тела до и после соударения движутся по одной прямой.

Пусть движущееся вдоль оси Ох со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ тело массы m_1 сталкивается с движущимся вдоль ($\upsilon_1 > \upsilon_2$) или против оси Ох со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ телом массы m_2, в результате чего их скорости оказываются равными $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (рис.1.28). Используя для замкнутой системы, состоящей из двух тел, законы сохранения импульса и механической энергии, найдем проекции скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ тел на ось Ох после их соударения

$$\frac{m_1 \upsilon^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad m_1(\upsilon_1 - u_{1X})(\upsilon_1 + u_{1X}) = m_2(u_{2X} - \upsilon_{2X})(u_{2X} + \upsilon_{2X}); \qquad (*)$$

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \Rightarrow m_1(\upsilon_1 - u_{1X}) = m_2(u_{2X} - \upsilon_{2X}). \qquad (**)$$

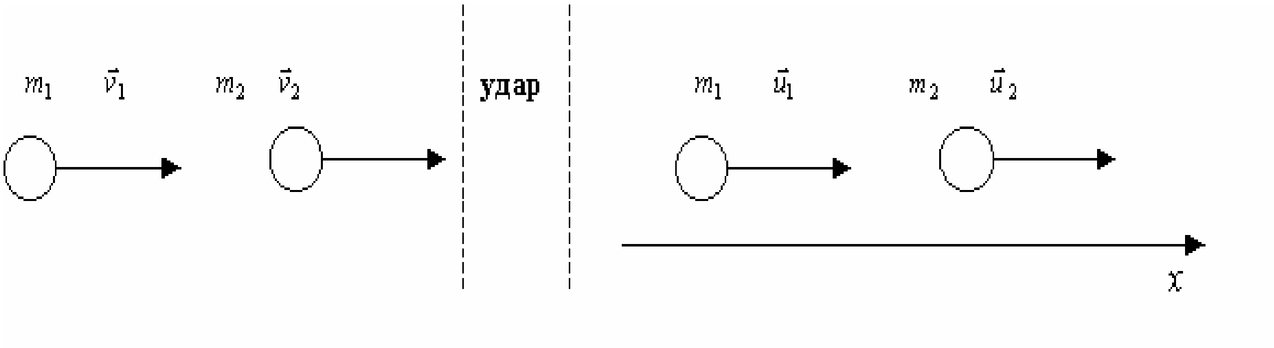
Учитывая выражение (**), можно упростить формулу (*)

$$\upsilon_1 + u_{1X} = u_{2X} + \upsilon_{2X} \Rightarrow u_{2X} = u_{1X} + \upsilon_1 - \upsilon_{2X}.$$

Подставляя u_{2X} в (**), получим:

$$m_1(\upsilon_1 - u_{1X}) = m_2(u_{1X} + \upsilon_1 - \upsilon_{2X} - \upsilon_{2X}),$$

$$u_{1X} = \frac{2m_2 \upsilon_{2X} + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2}, \qquad u_{2X} = \frac{2m_1 \upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_{2X}}{m_1 + m_2}. \quad (1.87)$$



Р
ис.1.28

Рассмотрим ряд важных для практики частных случаев использования формул (1.87)

Пример 1**. Два тела одинаковой массы ($m_1 = m_2$), движущиеся вдоль оси *ох* со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ ($\upsilon_1 > \upsilon_2$).навстречу друг другу ($\upsilon_{1X} = \upsilon_1$, $\upsilon_{2X} = -\upsilon_2$) и испытывают упругое соударение, в результате которого согласно формул (1.87) происходит обмен их скоростями: $u_{1x} = \upsilon_{2X} = -\upsilon_2$, $u_{2x} = \upsilon_1$. При υ_2 =0 получим, что скорость первого тела за одно соударение снизится до нуля:** $u_{1x} = 0$.

В ядерных реакторах необходимо проводить эффективное уменьшение скорости нейтронов, возникающих при реакциях деления, от скоростей порядка $1{\cdot}10^7$ м/с до скоростей, соответствующих скорости их теплового движения при температуре Т=300 К ($\approx 3{\cdot}10^3$ м/с). Как следует из рассмотренного примера, для этого необходимо заставить нейтроны испытывать соударения с близкими по массе атомами водорода, входящими в состав воды H_2O (скорость атомов водорода можно считать практически равной нулю по сравнению со скоростью нейтронов). Однако из-за большой потери нейтронов, связанных с протеканием при таких столкновениях реакций образования атомов тяжелого водорода (^2_1H), используют в качестве замедлителя тяжелую воду (D_2O). При этом требуется порядка 10 столкновений для требуемого замедления скорости нейтронов.

Пример 2. **Тело массы *m_1*, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, упруго ударяется о неподвижное тело, масса которого существенно больше *m_1* ($\vec{\upsilon}_2$=0, *$m_2 >> m_1$*). Согласно формулам (1.87) после столкновения первое тело будет двигаться в обратном направлении с той же по модулю скоростью, а второе тело практически останется неподвижным ($u_{1X} = -\upsilon_1$, $u_{2X} \approx 0$). Такое столкновение происходит при лобовом ударе молекулы о стенку сосуда. При этом молекула упруго (без потери скорости) отскакивает обратно, а стенка остается практически неподвижной. Результаты такого столкновения молекулы со стенкой сосуда**

используются при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории для давления идеального газа.

Если же стенка (поршень) будет двигаться вдоль оси *ox* со скоростью $\vec{\upsilon}_2$, то, как следует из формул (1.87), в результате столкновения молекула теряет часть своей скорости ($u_{1x} = -\upsilon_1 + 2\upsilon_2, \quad \upsilon_1 >> \upsilon_2$), а скорость поршня останется неизменной ($u_{2x} = \upsilon_2$). Это означает, что расширение газа, возникающее при движении поршня, в отсутствие теплопередачи (отсутствуют внешние источники увеличения средней скорости теплового движения молекул) приводит к его охлаждению (средние скорости движения молекул уменьшаются), так как работа газа происходит за счет уменьшения его внутренней энергии.

1.5. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Специальная теория относительности (С.Т.О.) изучает свойства пространства и времени как двух форм существования материи в инерциальных системах отсчета. Обычно для удобства выбирают две ИСО – неподвижную С.О. *К* с осями координат О*x,* О*y,* О*z* и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ вдоль совпадающих осей О*x* и О$'x'$ систему отсчета К$'$ (оси О*y* и О$'y'$, О*z* и О$'z'$ при движении остаются параллельными). В начальный момент времени (*t*=0) начала координат этих систем отсчета – точки О$'$ и О$'$ совпадают (рис.1.29).

Отметим общие свойства пространства и времени**, подтвержденные опытными фактами и не зависящие от рассматриваемых теоретических моделей: пространство является однородным и изотропным, а время является однородным.**

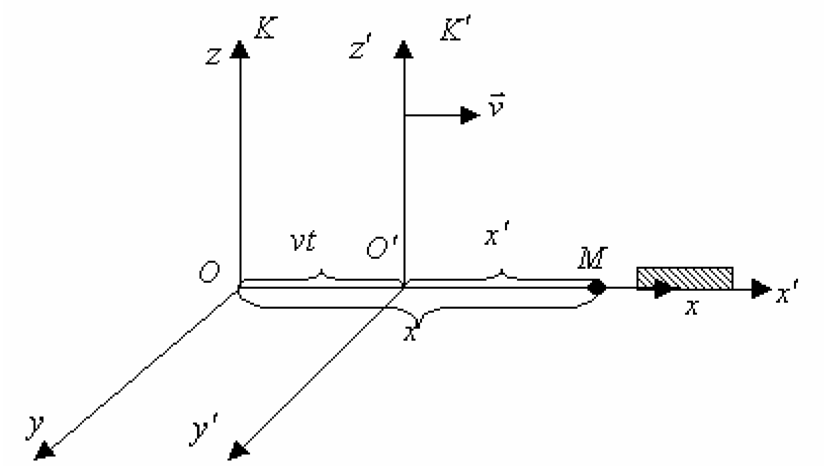


Рис. 1.29

1.5.1. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея

В классической механике считается, что предельная скорость передачи взаимодействий в природе является бесконечно большой ($\upsilon_{ПРЕД} = \infty$), и поэтому из этого предположения следуют дополнительные свойства пространства и времени**: пространство и время абсолютны, не связаны друг с другом; время течет одинаково во всех ИСО (*t*=*t′*); пространство и время не зависят от наличия вещества, пространство является пустым вместилищем материальных тел.**

Дополнительные свойства пространства и времени, возникающие в классической механике, позволяют получить преобразования Галилея **– это формулы, связывающие координаты и время одного и того же события в разных ИСО. Под событием понимают любое явление (выстрел из ружья, рождение частицы и т.д.), происходящее в одной точке пространства в какой-либо момент времени.**

Пусть в точке *M* (рис.1.29) происходит какое-либо событие, координаты и время которого в С.О. *K* – (*x, y, z, t*), а в С.О. *K′* – (*x′, y′, z′, t′*). Учитывая расположение точки *M* (рис.1.29) и дополнительные свойства пространства и времени, запишем преобразования Галилея:

Переход из K' в K: $\begin{cases} x = x' + \upsilon\ t \\ y = y', z = z' \\ t = t' \end{cases}$ Переход из K в K': $\begin{cases} x' = x - \upsilon\ t \\ y' = y, z' = z \\ t' = t \end{cases}$ **(1.88)**

В заключение параграфа отметим важный принцип, позволяющий существенно упростить описание механических явления в разных ИСО. Это принцип относительности Галилея**, он является следствием опытных фактов и утверждает равноправие всех ИСО по отношению к происходящим в них механическим явлениям. Приведем различные эквивалентные формулировки этого принципа относительности: 1) никакими механическими опытами, находясь внутри ИСО, нельзя установить движется она равномерно и прямолинейно или покоится; 2) все законы механики выглядят, записываются одинаково во всех ИСО; 3) все механические явления протекают одинаково во всех ИСО; 4) все законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея.**

Под инвариантной величиной **понимают величину, принимающую одинаковое значение во всех ИСО. Под** инвариантной формулой **понимают формулу, которая записывается одинаково во всех ИСО.**

Покажем, что второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея, т.е. он записывается одинаково во всех ИСО:

С.О. *K*: ***F=ma,*** С.О. *K'*: ***F'=m'a'.***

Для этого рассмотрим, как преобразуются масса и ускорение при переходе из одной системы отсчета в другую. В классической механике масса тела является инвариантной величиной (*m=m'*), ход времени во всех ИСО одинаков (*t=t'*) и закон сложения скоростей **выглядит таким образом**

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - \upsilon t)}{dt} = u_x - \upsilon, \qquad \textbf{(1.89)}$$

где считается, что тело движется в С.О. К и К' со скоростями $\vec{u}$ и $\vec{u}'$; направленными вдоль осей О*x* и О'*x'* . Тогда можно записать:

$$F' = m'a' = m\frac{du_x'}{dt'} = m\frac{d(u_x - \upsilon)}{dt'} = m\frac{du_x}{dt} = ma = F,$$

что и требовалось показать.

1.5.2. Постулаты С.Т.О. Опытное обоснование постулатов

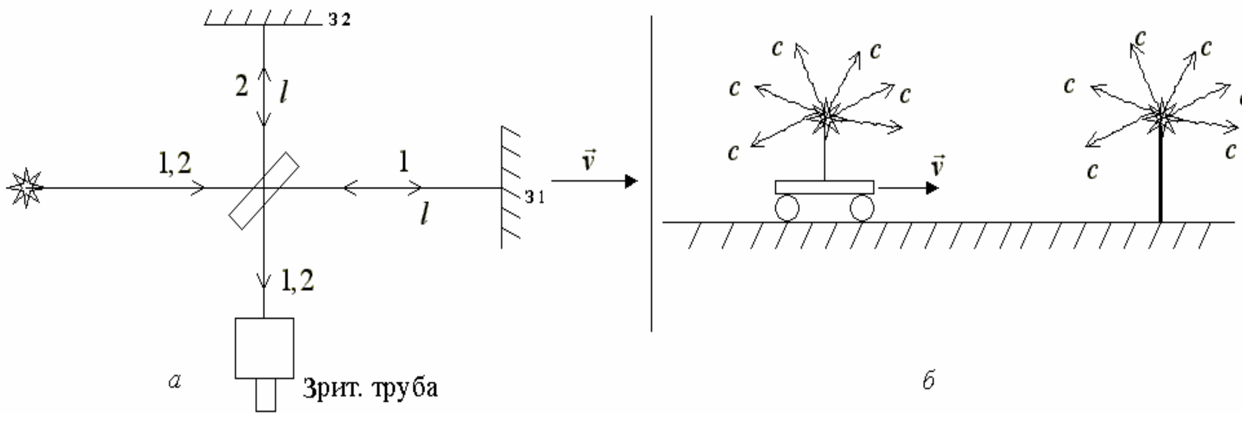
Специальная теория относительности была создана А. Эйнштейном в 1905 г. В ее основе лежат два постулата – принцип относительности Эйнштейна и постулат о постоянстве скорости света в вакууме.

До начала XX века считалось, что все физические явления можно свести к механическим явлениям и поэтому принцип относительности Галилея оправдывал себя, позволяя упростить объяснение (описание) опытных фактов. После открытия электромагнитных волн, квантовой механики, ядерной физики оказалось, что разнообразные формы движения материи не сводятся к механическому движению и поэтому вполне естественно возникло обобщение принципа относительности Галилея на всю совокупность физических явлений. Это было сделано А. Эйнштейном и подтверждается всеми имеющимися опытными фактами. Приведем несколько эквивалентных формулировок **первого постулата** специальной теории относительности **(принципа относительности Эйнштейна)**: 1) никакими физическими опытами, находясь внутри ИСО, нельзя установить движется она равномерно и прямолинейно или покоится; 2) все законы физики выглядят, записываются одинаково во всех ИСО; 3) все физические явления протекают одинаково во всех ИСО; 4) все законы физики инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Из третьей формулировки первого постулата следует, что преобразования Галилея в С.Т.О. заменяются на преобразования Лоренца.

Согласно **второму постулату С.Т.О.** скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источника и приемника света. Этот постулат является необычным с обычной точки зрения, но он был подтвержден во многих опытах; среди которых наиболее известным является опыт Майкельсона и Морли (1881-1887 гг.).

Отвлекаясь от конкретных исторических аспектов этого опыта можно сказать, что в нем выяснялась зависимость скорости света от движения источника и приемника света. В этом опыте свет от источника делился на два луча, которые



отражались от взаимно перпендикулярных зеркал, проходили до встречи одинаковое расстояние $2l$ и попадали в зрительную трубу, в которой наблюдалась картина интерференции (рис.1.30,а)

Рис.1.30

Вначале луч 1 проходил расстояние вдоль и против скорости Земли ($\upsilon \cong 30$ км/с), а луч 2, двигаясь перпендикулярно к направлению скорости Земли, проходил до встречи с лучом 1 такое же расстояние $2l$. Учитывая закон сложения скоростей в классической механике (1.90) для времени t_1 движения луча 1, можно получить следующую формулу:

$$t_1 = \frac{l}{c-\upsilon} + \frac{l}{c+\upsilon} = \frac{2lc}{c^2-\upsilon^2} .$$

Аналогично можно получить формулу для времени t_2 движения луча 2. Расчеты, проведенные в рамках классической механики, дают что $\Delta t=(t_1-t_2)>0$. Если ориентацию установки изменить на 90^0, то тогда $\Delta t=(t_1-t_2)<0$ и поэтому оптическая разность хода лучей должна измениться и соответственно должна сместиться картина интерференции. Но этого в опыте не наблюдалось, т.е. время распространения света в обоих направлениях было одинаковым: $t_1=t_2$.

Отсюда следует вывод, что к скорости света в вакууме неприменим закон сложения скоростей классической механики и она не зависит от движения источника и приемника света – скорость света одинакова во всех направлениях; свет, испущенный по всем направлениям подвижным и неподвижным источниками, будет иметь одинаковую скорость $\upsilon = c$ (рис.1.30,б).

Следствием второго постулата С.Т.О. является тот факт, что предельная скорость передачи взаимодействий в природе является конечной и равной скорости света в вакууме. Это приводит к новым дополнительным свойствам пространства и времени в С.Т.О.

1.5.3. Преобразования Лоренца. Дополнительные свойства пространства и времени в С.Т.О.

Общие свойства пространства и времени остаются и в С.Т.О., поэтому преобразования Лоренца как и преобразования Галилея, будут линейными по координатам и времени. Добавится только коэффициент α, учитывающий второй постулат С.Т.О. и зависящий от скорости движения тела и скорости света в вакууме. Итак, запишем преобразования Лоренца:

Переход из K' в K: $\begin{cases} x = \alpha(x' + \upsilon t) \\ y = y', z = z' \\ t = \alpha(t' + \frac{\upsilon}{c^2} x') \end{cases}$ **Переход из K в K':** $\begin{cases} x' = \alpha(x - \upsilon t) \\ y' = y, z' = z \\ t' = \alpha(t - \frac{\upsilon}{c^2} x) \end{cases}$ (1.90)

Коэффициент α можно найти следующим образом: в начальный момент времени t=0 из начала координат систем отсчёта K и K' (точки O и O') посылаем световой сигнал. Из второго постулата С.Т.О. для координаты точки, которой достиг сигнал, можно записать $x=ct$, $x'=ct'$ и поэтому:

$$\left.\begin{aligned} ct &= \alpha(ct' + \upsilon\ t') = \alpha\ t'(c + \upsilon) \\ ct' &= \alpha(ct - \upsilon\ t) = \alpha\ t(c - \upsilon) \end{aligned}\right\} \Rightarrow c^2 t\ t' = \alpha^2 t\ t'(c^2 - \upsilon^2),$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \tag{1.91}$$

Формулы для преобразования времени в (1.90) можно получить из выражений для преобразования координат. Действительно

$$x = \alpha(x' + \upsilon\ t') = \alpha\left[\alpha(x - \upsilon\ t) + \upsilon\ t'\right] = \alpha^2 x - \alpha^2 \upsilon\ t + \alpha\upsilon\ t' \Rightarrow t' = \alpha(t - \frac{\upsilon}{c^2} x).$$

При малых скоростях движения тел $\upsilon << c$ коэффициент $\alpha \to 1$ и поэтому преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Поэтому говорят, что *классическая механика – это механика малых скоростей движения тел, а релятивистская механика – механика скоростей движения тел, близких к скорости света в вакууме.* Релятивистская механика включает в себя как частный случай ($\upsilon << c$) классическую механику.

Из формул для преобразования времени (1.90) следуют **дополнительные свойства пространства и времени в С.Т.О.**: 1) в формулы для преобразования времени входят координаты, это означает, что пространство и время как две формы существования материи существуют в неразрывном единстве, они взаимосвязаны друг с другом; 2) из формул (1.90) следует, что $t \neq t'$, т.е. время течет по разному в разных ИСО.

Эти свойства пространства и времени приводят к необычным с обычной точки зрения эффектам как в кинематике, так и в динамике, они будут рассмотрены в следующих параграфах.

1.5.4. Кинематика С.Т.О.

1.5.4.1. Понятие «одновременность» двух событий

Пусть в С.О. K' происходят одновременно ($t_1' = t_2'$) два события в разных точках пространства ($x_1' \neq x_2'$). Необходимо выяснить, будут ли эти события одновременными в С.О. K, т.е. чему равняется разность времен (t_2-t_1)?

Для ответа на этот вопрос используем преобразования Лоренца и распишем (t_2-t_1):

$$t_2 - t_1 = \alpha(t_2' + \frac{\upsilon}{c^2} x_2') - \alpha(t_1' + \frac{\upsilon}{c^2} x_1') = \alpha \frac{\upsilon}{c^2}(x_2' - x_1') \neq 0,$$

т.е. эти события не будут одновременными в С.О. K. Следовательно, **понятие одновременности двух событий является относительным** – события, происходящие одновременно в одной ИСО, не будут одновременными в других ИСО. Только в частном случае $x_1' = x_2'$ события будут одновременными во всех ИСО.

В классической механике $\upsilon << c$ и поэтому $t_2 = t_1$, т.е. понятие одновременности двух событий является абсолютным – они будут одновременными во всех ИСО.

1.5.4.2. Понятие «длина» предмета

Пусть в С.О. K' вдоль оси $O'x'$ располагается неподвижный стержень, длина которого может быть найдена как разность координат его концов $l' = x_1' - x_2'$ (рис.1.29). Необходимо определить длину этого стержня в С.О. К, относительно которой он движется со скоростью υ ($l = (x_2 - x_1') = ?$).

Для определения длины l стержня используем преобразования Лоренца и укажем метод определения длины l движущегося стержня: необходимо в С.О. K одновременно зафиксировать координаты концов стержня $(t_1 = t_2)$, в результате чего можно получить

$$l' = x_2' - x_1' = \alpha(x_2 - \upsilon\, t_2) - \alpha(x_1 - \upsilon\, t_1) = \alpha\ (x_2 - x_1) = l\alpha,$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}\ . \qquad (1.92)$$

В формуле (1.92) через l_0 обозначена **собственная длина стержня**, это длина стержня в той ИСО, относительно которой он неподвижен (в рассматриваемом случае $l_0 = l'$). Собственная длина предмета является инвариантом С.Т.О.

Из формулы (1.92) следует, что: 1) при движении предметов происходит сокращение продольных, направленных вдоль скорости, размеров предметов; поперечные, перпендикулярные к скорости движения, размеры тел не изменяются; 2) собственная длина предмета l_0 является наибольшей из всех возможных длин предмета.

Итак, понятие «длина» предмета является относительным, т.е. зависит от выбора ИСО. В классической механике $\upsilon \ll c$ и поэтому понятие «длины предмета» является абсолютным, одинаковым во всех ИСО.

1.5.4.3. Понятие «промежуток времени» между двумя событиями

Пусть в С.О. К' в одной точке пространства ($x_1' = x_2'$) происходят два события или протекает какой-либо процесс. Промежуток времени $\Delta t' = (t_2' - t_1')$ в С.О. К' можно измерить одними часами, находящимися в этой точке пространства. Возникает вопрос, чему равняется этот промежуток времени в С.О. К ($\Delta t = t_2 - t_1$), относительно которой эти события происходят в разных точках оси Ох ($x_1 \neq x_2$).

Вполне понятно, что промежуток времени Δt нужно измерять двумя часами, расположенными в разных точках оси Ox - в одной точке ($x=x_1$) находятся часы, измеряющие время одного события ($t=t_1$) или начало процесса, а во второй ($x=x_2$) находятся часы, измеряющие время другого события ($t=t_1$) или окончание процесса.

Для определения Δt используем преобразования Лоренца

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \alpha(t_2' + \frac{\upsilon}{c^2} x_2') - \alpha(t_1' + \frac{\upsilon}{c^2} x_1') = \alpha(t_2' - t_1') = \alpha \Delta t',$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \tag{1.93}$$

где Δt_0 **– собственный промежуток времени**, он измеряется одними часами в той ИСО, относительно которой события происходят в одной точке пространства, это инвариант С.Т.О.

Из формулы (1.93) следует, что 1) $\Delta t > \Delta t_0$, т.е. **в движущейся ИСО происходит замедление хода времени; движущиеся часы идут медленнее покоящихся**; 2) $\Delta t_0 \leq \Delta t$, т.е. собственный промежуток времени между двумя событиями является наименьшим из всех возможных промежутков времени для этих событий.

Замедление хода времени в движущейся С.О. реально подтверждается экспериментами с участием нестабильных элементарных частиц, рождающихся в ядерных реакциях со скоростями, близкими к скорости света в вакууме (например, $\upsilon = 0{,}99.c$). В этом случае время их жизни до распада существенно различается в С.О. K', связанной с ними (собственное время Δt_0, равное, например, Δt_0=25 нс), и в С.О. K, связанной с Землей (время жизни $\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} \approx 7{,}09 \Delta t_0$). Это приводит к тому, что с учетом замедления времени частица пролетает в С.О. K до распада значительно большее расстояние ($l = \upsilon\, \Delta t$=52 м.), чем без учета этого эффекта ($l' = \upsilon \Delta t_0$=7,4 м).

Такие частицы регистрируют на расстояниях l от места их рождения, значительно превышающих l'. Отметим, что в С.О. K', связанной с частицей, расстояние l' проходит Земля мимо неподвижной частицы за время ее жизни Δt_0.

В силу равноправия всех ИСО замедления времени в С.Т.О. носит относительный характер. Наблюдатель, находящийся на Земле, отметит, что движения космонавта в ракете, движущейся со скоростью υ, близкой к скорости света, будут замедленными по сравнению с его движениями. То же самое скажет космонавт, наблюдая за человеком на Земле. И они оба будут правы, так как космонавт может считать С.О., связанную с ним, неподвижной, а С.О., связанную с Землей, движущейся со скоростью υ в обратном направлении.

1.5.4.4. Релятивистский закон сложения скоростей

Пусть вдоль совпадающих осей Оx и О$'$ x' систем отсчета K и K' в их положительном направлении с постоянной скоростью движется тело. Проекции вектора скорости на координатные оси в СО K и K' соответственно равны:

$$\textbf{С.О.}\quad \boldsymbol{K}': \vec{u}\,' = (u'_x = dx'/dt', u'_y = 0, u'_z = 0);$$

$$\textbf{С.О.}\quad \boldsymbol{K}: \vec{u} = (u_x = dx/dt, u_y = 0, u_Z = 0).$$

Необходимо найти формулы связи между $\vec{u}$ и $\vec{u}\,'$; в данном случае между u_x и $u_X{}'$. Для этого в преобразованиях Лоренца (1.90) возьмем бесконечно малые (элементарные) приращения координат и времени

$$dx = \alpha(dx' + \upsilon dt'), dt = \alpha(dl' + \frac{\upsilon}{c^2}dx') \Rightarrow u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha(dx' + \upsilon dt')}{\alpha(dt' + \frac{\upsilon}{c^2}dx')} = \frac{dx' \backslash dt' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x}.$$

Итак,

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x}. \qquad (1.94)$$

Аналогично можно получить обратную формулу связи

$$u_x{}' = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}. \qquad (1.95)$$

Формулы (1.94) и (1.95) представляют собой закон сложения скоростей в релятивистской механике. При малых скоростях движения тел ($\upsilon << c$) эти формулы переходят в закон сложения скоростей классической механики (1.89).

Из закона сложения скоростей (1.94) и (1.95) следует, как это и должно быть, согласно второму постулату С.Т.О., скорость движения тел не может быть больше скорости света в вакууме ($\upsilon << c$). Приведем в подтверждение этому факту два примера:

Пример 1. Пусть световой сигнал в С.О. K' распространяется вдоль оси $O'x'$, т.е. $u_x' = c$. Тогда согласно формуле (1.95) запишем

$$u_x = \frac{u_x' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u_x'} = \frac{c + \upsilon}{1 + (\upsilon / c^2)c} = c \ ,$$

что и должно было получиться.

Пример 2. Пусть ядро, двигаясь со скоростью 0,5c относительно ускорителя, испускает в направлении своего движения электрон, который относительно ядра движется со скоростью 0,8c. Найдем скорость электрона относительно ускорителя.

Для того чтобы использовать закон сложения скоростей (1.95), свяжем систему отсчета K' с ядром, а систему отсчета K с ускорителем и направим оси Ox и $O'x'$ вдоль направления движения ядра и электрона. Тогда $\upsilon = 0{,}5c$, $u'_x = 0{,}8c$, а скорость электрона относительно ускорителя найдем следующим образом:

$$u_x = \frac{u_x' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u_x'} = \frac{0{,}8c + 0{,}5c}{1 + \frac{0{,}8c}{c^2}0{,}5c} = \frac{1{,}3}{1{,}4}c = 0{,}93\,c = 2{,}8 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

т.е. получаем, что $u_x < c$.

Для произвольного направления движения тел формулы (1.94) и (1.95) усложняются, но всегда скорость тела во всех ИСО не будет превышать скорости света в вакууме.

1.5.5. Динамика С.Т.О.

1.5.5.1. Релятивистский импульс и масса тела

Оказывается, что второй закон Ньютона в виде (1.29) не является релятивистски инвариантным, т.е. он не удовлетворяет первому постулату С.Т.О., не удовлетворяет преобразованиям Лоренца. Получить релятивистски инвариантную формулу закона из выражения (1.29) не удается из-за усложнения в С.Т.О. взаимосвязи между действующей на тело силой и ускорением тела, они в общем случае даже не совпадают по направлению. Это можно сделать на основе формулы (1.28), используя для импульса частицы вместо формулы (1.27) другое выражение.

В СТО импульс тела, движущегося в С.О. K со скоростью $\vec{u}$, запишется следующим образом:

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt_0}, \qquad (1.96)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение тела в С.О. *К*;

dt_0 - бесконечно малый (элементарный) промежуток времени, отсчитанный по часам С.О., связанной с этим телом, т.е. он является собственным промежутком времени; m_0 – **масса покоя тела**. Это масса, измеренная в той ИСО, где тело неподвижно, это инвариант С.Т.О.

Вводя согласно выражению (1.93) промежуток времени dt, измеренный в С.О. *К*,

$$dt = dt_0\sqrt{1-u^2/c^2},$$

и учитывая, что $\vec{u}=d\vec{r}/dt$, для импульса $\vec{p}$ тела в С.О. *К* получим

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m\vec{u}, \tag{1.97}$$

где введена **релятивистская масса *m* тела**, зависящая от скорости его движения

$$m = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad . \tag{1.98}$$

В итоге для второго закона Ньютона в С.О. *К* запишем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \vec{p} \quad . \tag{1.99}$$

Эта формула является релятивистски инвариантной, т.е. она записывается так же и в С.О. *К′*

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{m_0\vec{u}'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}\right) = \vec{p}' \quad . \tag{1.100}$$

Из формулы (1.98) следует, что 1) релятивистская масса m тела возрастает с увеличением скорости его движения; 2) тела с отличной от нуля массой покоя ($m_0 \neq 0$) не могут двигаться со скоростью света в вакууме, так как при $u=c$ $m=m_0/0=\infty$, чего не может быть; 3) существуют частицы с нулевой массой покоя, движущиеся со скоростью $u=c$. В этом случае в формуле (1.98) возникает неопределенность ($m=0/0$), которая не противоречит существованию таких частиц. Ярким примером, подтверждающим этот факт, является существование фотонов-квантов электромагнитного поля.

Отметим, что в теоретической физике принята другая точка зрения на массу тела, а именно, масса тела обозначается буквой m и считается не зависящей от скорости движения тела; масса покоя m_0 и релятивистская масса тела не вводятся.

В курсе общей физики различия в трактовке массы тела не существенны и поэтому здесь принимается справедливым выражение (1.98)

1.5.5.2. Кинетическая энергия тела в С.Т.О.

Пусть на тело, движущееся в С.О. K со скоростью $\vec{u}$, действует сила $\vec{F}$. Запишем теорему о кинетической энергии для этого тела

$$dW_k = dA = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{u}dt = (\frac{d\vec{p}}{dt}\vec{u})dt \quad (1.101)$$

Перепишем полученную формулу в другом виде. Для этого преобразуем выражение (1.99)

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\,\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2}\frac{d}{dt}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}})$$

Умножим обе части полученного равенства скалярно на вектор $\vec{u}$ и учтем, что $\vec{u}d\vec{u} = udu$ и $\vec{u}\;\vec{u} = u^2$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\vec{u} = \frac{m_0u(du/dt)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{u^2}{c^2}\frac{m_0u(du/dt)}{(1-u^2/c^2)^{3\backslash 2}} = \frac{d}{dt}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}) \quad (1.102)$$

С учетом выражения (1.102) формула (1.101) примет вид

$$dW_k = d(m_0c^2/\sqrt{1-u^2/c^2}),$$

откуда следует:

$$W_k = m_0c^2/\sqrt{1-u^2/c^2} + \text{const}.$$

Постоянная в этом уравнении выбирается из условия равенства нулю кинетической энергии неподвижного тела: $\vec{u}$=0, $W_к$=0, т.е. $\text{const} = -m_0c^2$ и в релятивистской механике для кинетической энергии тела получается окончательное выражение

$$W_k = m_0c^2(1/\sqrt{1-u^2/c^2} - 1) \quad . \quad (1.103)$$

При малых скоростях движения тела (u<<c) первое слагаемое в (1.103) можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя его членами, что приводит к хорошо известному в классической механике выражению для кинетической энергии тела

$$W_k = m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - 1) = \frac{m_0u^2}{2}.$$

1.5.5.3. Закон взаимосвязи массы и энергии тела

Перепишем формулу (1.103) в следующем виде:

$$W_k + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = mc^2 .$$

Анализируя это соотношение, Эйнштейн предположил, что полная энергия тела должна складываться из энергии его движения (кинетической энергии) и энергии покоящегося тела, его внутренней энергии. Поэтому он отождествил второе слагаемое в этой формуле с внутренней энергией тела и назвал ее **энергией покоя тела W_0**, а сумму ($W_k + m_0 c^2$) назвал **полной энергией W тела**:

$$W_0 = m_0 c^2 ; \tag{1.104}$$

$$W = mc^2 . \tag{1.105}$$

Нужно отметить, что энергия покоя W_0 и полная энергия W тела не включают в себя потенциальной энергии тела во внешних полях.

Формула (1.105) выражает **закон взаимосвязи, пропорциональности массы и энергии тела**, согласно которому *полная энергия тела равна произведению релятивистской массы тела на квадрат скорости света в вакууме.*

В соответствии с ним любое изменение энергии тела сопровождается изменением его массы и наоборот:

$$\Delta m = \Delta W / c^2 . \tag{1.106}$$

Формулы (1.104)-(1.106) нашли свое подтверждение во многих экспериментальных фактах, особенно в области физики атомного ядра и элементарных частиц. Протекание ядерных реакций сопровождается выделением или поглощением энергии W, расчет которой по формуле $W=\Delta mc^2$ (где Δm – разность суммы масс покоя исходных ядер и элементарных частиц и продуктов реакции) приводит к согласию с экспериментом.

Также подтверждается формула для энергии связи атомного ядра $W_{CB} = \Delta mc^2$, где Δm – дефект массы атомного ядра.

Согласно выражению (1.104) любое тело обладает громадным (колоссальным) запасом энергии. Так, энергии покоя тела массой m_0=1 кг хватило бы на то, чтобы лампа мощностью 70 Вт непрерывно светила бы 40,7 млн. лет. Однако, существуют ограничения на возможность полного использования этой энергии. Так, при протекании ядреных реакций такое ограничение устанавливает закон сохранения массового числа (числа нуклонов) или закон сохранения барионного заряда. Поэтому можно максимально извлечь лишь несколько процентов от энергии покоя участвующих в реакции ядер. Существенно меньший процент этой энергии высвобождается при химическом горении различных веществ.

Максимальное извлечение энергии покоя возможно в реакциях аннигиляции – реакциях взаимодействия частиц и античастиц. Так, при встрече электрона и позитрона они исчезают и образуются два (реже - три) гамма-кванта

$$e^{-}+e^{+}\rightarrow 2\gamma,$$

т.е. материя в виде вещества переходит полностью в полевую форму ее существования и энергия такой ядерной реакции равна: $W_p = 2m_{0\,ЭЛ}c^2$.

Однако практическое использование таких реакций маловероятно из-за отсутствия антивещества в окружающем нас мире.

Из выражений для импульса (1.97) и энергии покоя (1.104) можно получить полезные формулы связи межу ними:

$$\vec{p}=\frac{W}{c^2}\vec{u}, \tag{1.107}$$

$$W=c\sqrt{p^2+W_0^2/c^2}=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}. \tag{1.108}$$

Для частиц с нулевой массой покоя (например, для фотона) из этих выражений следует:

$$p=\frac{W_ф}{c}=\frac{h\nu}{c}, \tag{1.109}$$

где энергия фотона, соответствующего электромагнитному излучению частоты ν рассчитывается по формуле: $W_ф=h\nu$; h - постоянная Планка.

1.5.6. Роль С.Т.О. в современной естественнонаучной картине мира

В отличие от теоретических моделей и теорий, предлагаемых для объяснения конкретных физических явлений, специальная теория относительности затрагивает наиболее общие представления о материи и формах ее существования – пространства и времени. Она наполняет эти понятия новым содержанием и дает более реалистичную картину мира. То, что раньше считалось незыблемым, абсолютным, оказалось изменяющимся, относительным: пространство и время взаимосвязаны, время течет по-разному в разных ИСО, понятия – длина предмета, одновременность двух событий, промежуток времени между событиями – являются относительными и т.д.

Но это не означает, что все в природе относительно: С.Т.О. предложила вместо старого новый набор инвариантных, абсолютных величин, таких как:
1) скорость света c в вакууме; 2) собственная длина l_0 предмета; 3)собственный промежуток времени Δt_0 между двумя событиями; 4) масса m_0 покоя тела; 5) энергия W_0 покоя тела; 6) причинно-следственная связь;
7) электрический заряд q; 8) пространственно-временной интервал $\Delta s=\sqrt{c^2\Delta t^2-(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)}$; 9) величина $(W^2-c^2p^2)$.

Последние (8 и 9) инварианты С.Т.О. связаны с модулями четырехмерного радиус-вектора и четырехмерного импульса в четырехмерном пространстве координат и времени (пространство и время в С.Т.О. взаимосвязаны и поэтому вводится такое пространство). В этом пространстве при переходе от одной ИСО к другой, т.е. при преобразованиях Лоренца, происходит поворот этих векторов, при котором составляющие векторов изменяются, а их модули остаются неизменными.

Конечно, в повседневной жизни скорости движения различных тел существенно меньше скорости света в вакууме и поэтому, в основном, используются формулы классической механики. Но для частиц малой массы (микрочастиц, таких как электрон, нейтрон, протон, атомы и т.д.) при анализе их движения необходимо учитывать релятивистские эффекты, и это подтверждает справедливость теории.

Логическим завершением С.Т.О. явилось создание А. Эйнштейном в 1916 г. общей теории относительности (О.Т.О.), которая является современным учением о влиянии тел, их полей тяготения на свойства пространства и времени.

В основе этой теории лежит принцип эквивалентности инертной и гравитационной массы тела. Согласно этому принципу масса тела, определяемая вторым законом Ньютона (инертная масса) и законом всемирного тяготения (гравитационная масса) эквиваленты. Это означает, что, находясь в лифте человек не может сказать почему он давит на его пол: либо лифт неподвижен и находится во внешнем поле тяготения, либо лифт движется равноускоренно в отсутствие внешних гравитационных полей. Этот принцип позволил учесть в уравнениях движения наличие тел, полей тяготения как фактор, искривляющий пространство и время.

Решение этих сложных уравнений, в частности, привело к созданию модели расширяющейся Вселенной, подтвержденной рядом косвенных доказательств (разбегание галактик от определенного центра, реликтовое излучение и т.д.) и к предсказанию целого ряда конкретных фактов, впоследствии обнаруженных на опыте, таких как искривление траектории световых лучей вблизи массивных тел, замедление хода времени в гравитационных полях, открытие черных дыр, в которые может превратиться звезда, израсходовав запас своего термоядерного горючего.

Общая теория относительности и механика движения частиц малой массы, квантовая механика являются в настоящее время наиболее современными теориями, находящимися на передовом крае познания естественнонаучной картины мира.

1.6.* ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА (НИСО)

Пусть относительно ИСО под действием сил $\sum \vec{F}_i$, тело движется с ускорением $\vec{a}$

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

Если рассмотреть движение такого тела относительно НИСО, то тогда ускорение тела $\vec{a}'$ будет другим, оно отличается от $\vec{a}$ на ускорение a_0

$$\vec{a} - \vec{a}' = \vec{a}_0, \qquad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$$

Запишем второй закон Ньютона для тела относительно НИСО:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_0 = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_u \qquad \textbf{(1.110)}$$

Для выполнения второго закона Ньютон относительно НИСО, согласно которому сумма всех сил, действующих на тело, сообщает ему ускорение $\vec{a}'$, необходимо ввести дополнительные силы, их называют силами инерции $\vec{F}_u$**.**
Нужно помнить, что *эти силы не связаны с взаимодействием тел, а обусловлены ускоренным движением НИСО*. Для сил инерции, согласно (1.110), можно записать

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_0 \qquad \textbf{(1.111)}$$

Если $\sum \vec{F}_i = 0$, то и в НИСО относительно которой тело будет неподвижно, сумма сил с учетом силы инерции $\vec{F}_u$ $\left(\sum \vec{F}_i + \vec{F}_u\right)$, также будет равна нулю в соответствии со вторым законом Ньютона.

Приведем пример: На гладком полу тележки находится шарик, привязанный к пружине. При движении тележки с ускорением $\vec{a}_0$ на шарик будет действовать сила упругости $\vec{F}_y$, которая сообщает ему ускорение $\vec{a}_0$ $\left(\vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_0\right)$, что соответствует второму закону Ньютона, записанного относительно неподвижной ИСО: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_y = m\vec{a}$ (рис.1.31,а)

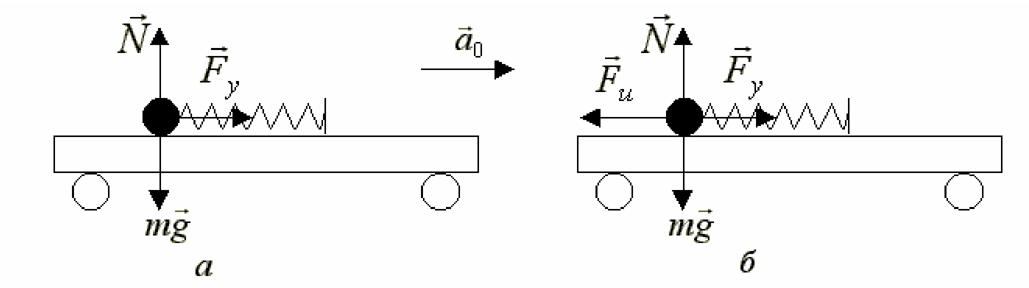


Рис. 1.31

В НИСО, связанной с тележкой, относительно которой шарик будет неподвижен, сумма сил, действующих на шарик, будет также равна нулю в соответствии с основным законом динамики: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_y + \vec{F}_u = 0$ (рис.1.31,б).

Таким образом, введение сил инерции позволяет описывать движение тел, как в ИСО, так и в НИСО по одним и тем же уравнениям динамики.

Представляет интерес рассмотреть еще один пример НИСО – это НИСО, которые вращаются с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Пусть надетый на стержень шарик, прикрепленный к центру диска пружиной, вращается вместе с диском вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис.1.32,а).

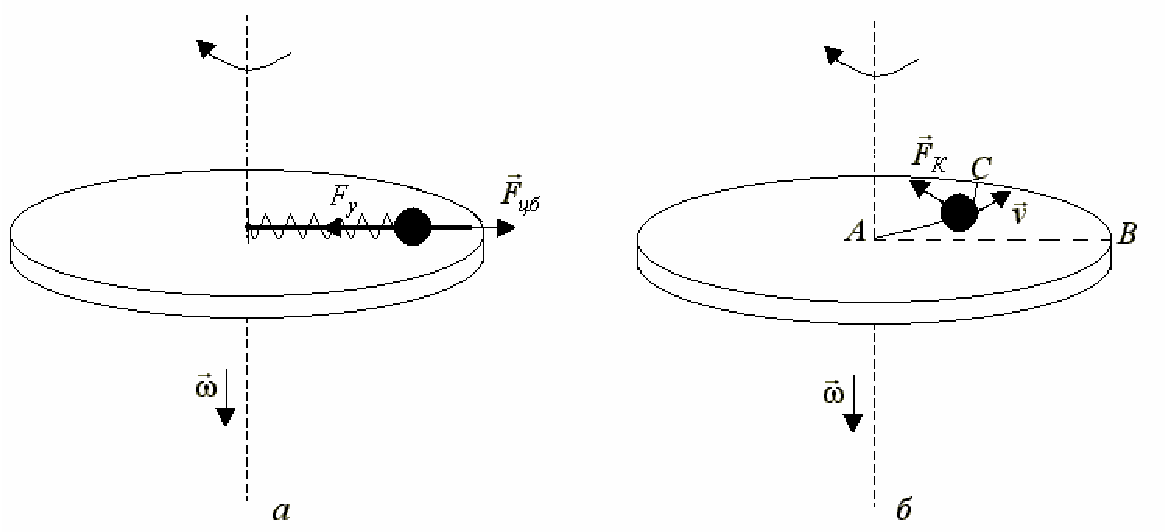


Рис.1.32

В зависимости от угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ шарик остановится на каком-то расстоянии *R* от оси вращения. Относительно ИСО нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$ шарику сообщает сила упругости пружины $\left(\vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_n\right)$, а относительно диска (НИСО) шарик находится в состоянии покоя под действием двух сил – силы упругости $\vec{F}_y$ и силы инерции, которую в данном случае называют центробежной силой $\vec{F}_{цб}$ $\left(\vec{F}_y + \vec{F}_{цб} = 0\right)$. ***Центробежная сила направлена от оси вращения по радиусу и по модулю равна***

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2 R \tag{1.112}$$

Эта сила зависит от угловой скорости вращения НИСО и от расстояния *R* до оси вращения.

С проявлением сил инерции можно встретится при торможении или ускорении поезда и при его движении на повороте – в этих случаях под действием сил инерции пассажиры отклоняются вперед, назад или в сторону, их прижимает к спинке сидения или они отклоняются от нее.

Из формулы (1.112) следует, что центробежные силы могут достигать больших значений, что широко используется в центробежных приборах и установках, таких как насосы, сепараторы, центрифуги и т.д.

Центробежные силы необходимо учитывать при проектировании (турбин, электродвигателей, винтов самолетов и т.д.). Небольшая разбалансировка, смещение центра тяжести от оси вращения может привести к большим

нагрузкам на подшипники, на ось вращения, вследствие чего возможно быстрое изнашивание и разрушение таких устройств.

Приведем еще один пример силы инерции. Оказывается, что относительно вращающейся системы отсчета появляется дополнительная сила, сила инерции, которая получила название силы Кориолиса $\bar{F}_K$ **.**

Если, например, сообщить телу скорость $\vec{v}$, направленную вдоль радиуса (рис.1.32,б), то оно будет перемещаться не по радиусу *AB*, а по кривой *AC*. Этот эффект, эффект влияния вращения подвижной системы отсчета на относительное движение тела учитывают введением силы Кориолиса $\bar{F}_K$, которая будет перпендикулярна к скорости движения тела.

На Земле этот эффект, обусловленный ее суточным вращением, заключается в том, что свободно падающее тело отклоняется в Северном полушарии вправо, а в Южном - влево от направления движения.

Вследствие медленного вращения Земли эти отклонения являются малыми. Они становятся заметными при длительном движении – например, происходит более сильное подмывание правых берегов в Северном полушарии и левых берегов в Южном полушарии рек, текущих в меридиональном направлении.

В заключение этого параграфа сделаем ряд замечаний относительно сил инерции: 1. Необходимо помнить, что силы инерции являются внешними по отношению к НИСО и поэтому в них не выполняются законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса. 2. Силу инерции также, как и силы тяготения сообщают телам независимо от их массы одинаковые ускорения. Поэтому, как было уже отмечено в параграфе 1.5.6, нельзя различить человеку, находящемуся в лифте, почему он давит на его пол: либо лифт неподвижен и находится во внешнем поле тяготения, либо лифт находится в поле сил инерции (движется равноускоренно) в отсутствии внешнего гравитационного поля. Это позволило Эйнштейну сформулировать принцип эквивалентности, согласно которому поле тяготение в небольшой области пространства и времени по своему проявлению тождественно ускоренной системе отсчета. Этот принцип, доказанный экспериментально с большой точностью, лег в основу создания общей теории относительности (А.Эйнштейн, 1915- 16 гг.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Некоторые дополнительные сведения и формулы,

используемые при изложении курса физики

1. Графический смысл производной от функции *y(x)* по аргументу *x* и **интеграла** от *y(x)* в пределах значений аргумента от x_1 до x_2.

Для определения производной функции y по аргументу x при каком-либо значении $x = x_0$ необходимо взять конечные приращения аргумента x ($\Delta x = x_1 - x_2$) и функции y ($\Delta y = y_1 - y_2$) и затем устремить Δx к нулю, т.е. взять бесконечно малые приращения dx и dy (их также называют элементарными приращениями). Тогда производная y ' будет равна

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = tg\alpha\ , \qquad (П.1.1)$$

и графически y' представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке (рис.П.1.1,а).

Графически интеграл от функции y в пределах значений аргумента от x_1 до x_2 представляет собой площадь под графиком функции в пределах от x_1 до x_2 (рис.П.1.1,б.). Для ее расчета разбивают интервал (x_1, x_2) на малые участки Δx_i ($i=1,\dots,N$), определяют площади прямоугольных полосок ($y_i\Delta x_i$) и затем их суммируют.

Точное значение площади под графиком функции получают при стремлении $N\to \infty$, $\Delta x_i\to dx$, бесконечная сумма бесконечно малых величин (ydx) обозначается в виде интеграла

$$\int_{X_1}^{X_2} ydx = (\ell im \sum_{i=2}^{N} y_i \Delta x_i)_{N\to\infty, \Delta x_i \to 0}\ . \qquad (П.1.2)$$

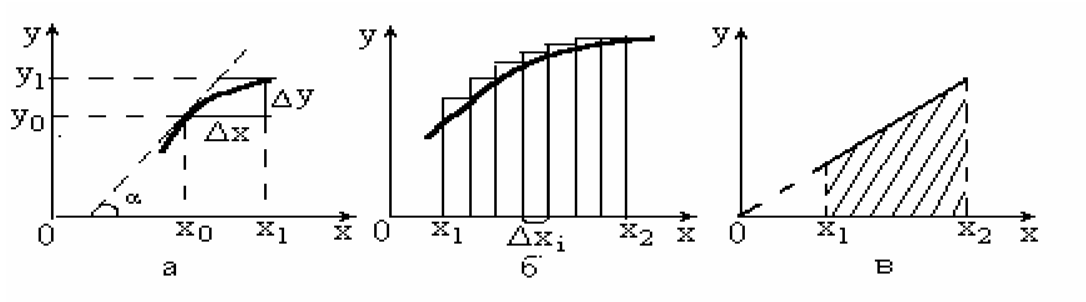


Рис. П.1.1

Так, в частности, для прямолинейной зависимости $y = bx$ интеграл будет равен площади трапеции (рис.П.1.1,в), поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = \int_{x_1}^{x_2} bxdx = \frac{bx_1 + bx_2}{2}(x_2 - x_1) = \frac{bx_2^2 - bx_1^2}{2}\ .$$

Приведем необходимые для дальнейшего изложения материала ряд формул табличных интегралов:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}), n \neq -1, \qquad (П.1.3)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_a^b = \ln\frac{|b|}{|a|}, \qquad (П.1.4)$$

$$\int_{d_1}^{d_2} \cos\alpha d\alpha = \sin\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1, \qquad (П.1.5)$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2, \qquad (П.1.6)$$

2. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это скалярная величина, равная произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на косинус угла α между ними

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = (\vec{b}\,\vec{a}) = ab\cos\alpha = b_a a,$$

где в формулу введена проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$ ($b_a = b\cos\alpha$, рис.П.1.2,а).

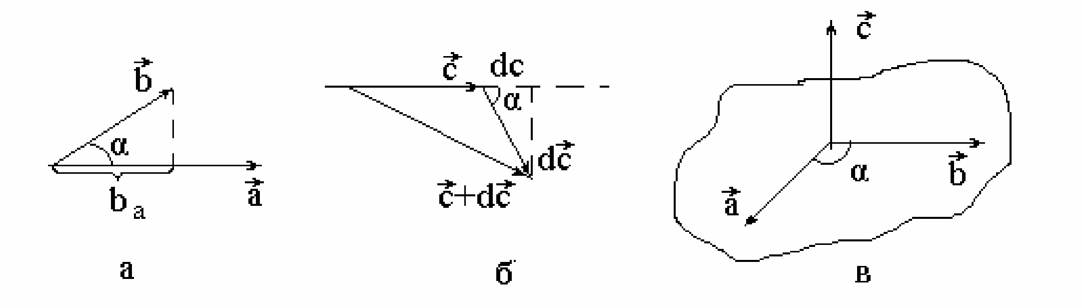


Рис. П.1.2

Скалярное произведение произвольного вектора $\vec{c}$ на его вектор элементарного приращения $d\vec{c}$ можно записать в следующем виде (рис.П.1.2,б)

$$d\vec{c}d\vec{c} = c|c|\cos\alpha = cdc,$$

где dc – элементарное приращение модуля вектора $\vec{c}$; оно может принимать как положительные, отрицательные, так и нулевые значения. В частности, это относится к элементарным приращениям модулей радиус-вектора $\vec{r}$ (dr), линейной скорости $\vec{v}$ (dv), угловой скорости $\vec{\omega}$(dω) и т.д. Для вектора же элементарного углового перемещения $d\vec{\varphi}$ по определению dφ всегда больше нуля.

3. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это вектор $\vec{c}$, равный по модулю произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла α между ними (рис.П.1.2,в).

$$\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}], \quad c = ab \cos\alpha, \quad \alpha = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, его направление можно найти по трем эквивалентным правилам: 1) **правило правого буравчика –** вращательное движение буравчика должно совпадать с направлением кратчайшего поворота от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, тогда его поступательное движение дает направление $\vec{c}$; 2) **правило левой руки** – четыре пальца нужно расположить по направлению вектора $\vec{a}$, вектор $\vec{b}$ должен входить в ладонь, тогда отогнутый на 90^0 большой палец покажет направление $\vec{c}$; 3) **правило векторного произведения** – если смотреть с конца вектора $\vec{c}$ на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то тогда кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ будет направлен против часовой стрелки.

4. Двойное векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ раскрывается следующим образом

$$[\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}). \qquad (П.1.7)$$

5. Градиент скалярной величины a. Пусть в пространстве каким-либо образом распределена скалярная величина a (существует поле скалярной величины a) – это может быть поле температуры ($a = T$), плотности вещества ($a = \rho$), потенциальной энергии ($a = W_p$) и т.д. Такое поле можно охарактеризовать максимальным и минимальным значением a, средним значением a, а также градиентом a. Под градиентом скалярной величины понимают вектор, который в каждой точке пространства направлен в сторону наиболее быстрого возрастания a и численно равный приращению величины a на единицу длины этого направления

$$grad a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k}, \quad |grad a| = \frac{da}{d\ell}, \qquad (П.1.8)$$

где $\vec{\ell}$ - направление $grad\, a$ в данной точке пространства; вектора $\vec{l}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - вектора единичной длины ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$), указывающие направления осей Ox, Oy и Oz в пространстве (рис.П.1.3). Они позволяют представить произвольный вектор $\vec{b}$ в виде суммы его проекции на оси (рис.П.1.3)

$$\vec{b} = b_X\,\vec{i} + b_Y\,\vec{j} + b_Z\,\vec{k}\ . \qquad (\text{П.1.9})$$

При вычислении производной величины a по координате x в формуле (П.1.8) считается, что координаты y и z остаются постоянными – такая производная называется частной производной по координате x

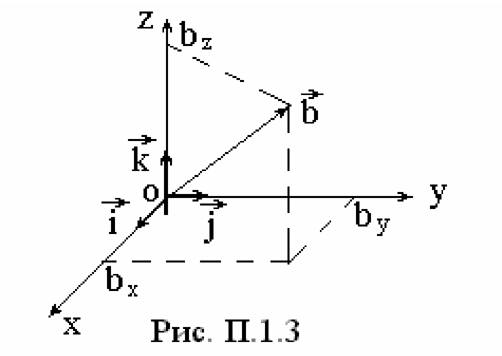


Рис. П.1.3

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{da}{dx}\ (y\text{=const, z=const}).$$

Аналогичные предположения принимаются при расчете частных производных по координатам y и z.

Выражение (П.1.8) можно записать в более компактном виде, если ввести **оператор Гамильтона** или **оператор Набла**

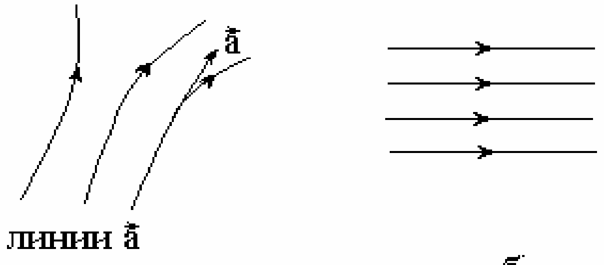
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ . \qquad (\text{П.1.10})$$

Действие этого оператора на скалярную величину a приводит к выражению (П.1.8), т.е. $\text{grad}\,a = \nabla\,a$.

6. Математическое описание векторных полей.

6.1. Линии вектора $\vec{a}$. Однородные и неоднородные поля. Пусть в пространстве существует поле вектора $\vec{a}$, т.е. в каждой точке пространства задан вектор $\vec{a}$. Это может быть поле вектора скорости $\vec{\upsilon}$ течения жидкости, вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля, вектора напряженности $\vec{E}_в$ вихревого электрического поля, вектора магнитной индукции $\vec{B}$ магнитного поля и т.д.

Для описания векторного поля вводят понятие **линий вектора** $\vec{a}$ - они проводятся так, чтобы в каждой точке линии вектор $\vec{a}$ был направлен по касательной к ним (рис.П.1.4,а). Они нигде не пересекаются, их проводят так, чтобы густота ли-

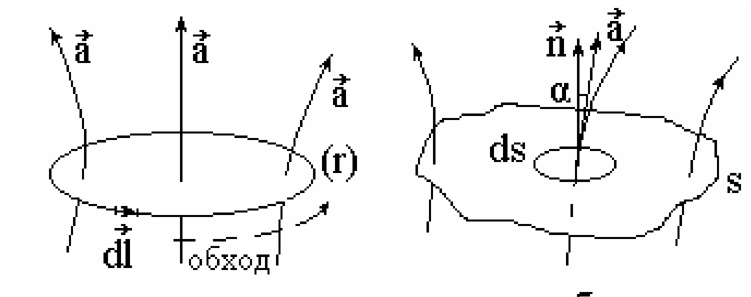


а Рис. П.1.4 б

нии $\vec{a}$ в данной точке поля (число линий $\vec{a}$, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную к линиям $\vec{a}$, в каждой точке поля равнялась модулю $\vec{a}$).

В общем случае векторное поле является неоднородным – направление и модуль $\vec{a}$ изменяются. Для однородного поля в каждой его точке вектор $\vec{a}$ одинаков ($\vec{a}$ = const). Линии $\vec{a}$ такого поля это параллельные прямые, соседние линии отстоят на одинаковом расстоянии друг от друга (рис.П.1.4,б.)

6.2 Циркуляция и поток вектора $\vec{a}$. Возьмем в неоднородном поле воображаемый замкнутый контур (*Г*), укажем произвольно направление его обхода и введем вектор $d\vec{\ell}$, равный по модулю элементарной длине $d\ell$ контура. В каждой точке вектор $d\vec{\ell}$ совпадает с касательной к контуру и направлен по обходу контура (рис.П.1.5,а).



а Рис. П.1.5 б

Тогда **циркуляцией вектора** $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру (Г) называют интеграл следующего вида

$$\oint_{Г} \vec{a}d\vec{\ell} = \oint_{Г} ad\ell\cos\alpha\,, \quad \alpha = (\vec{a}, \widehat{\ } d\vec{\ell})\,. \qquad (П.1.11)$$

Можно утверждать, что если для поля вектора $\vec{a}$ циркуляция $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру (Г) равна нулю, то это поле является потенциальным (например, поле силы тяжести $m\vec{g}$, электростатическое поле вектора $\vec{E}$ и т.д.)

$$\oint_{Г} \vec{a}d\vec{\ell} = 0\,. \qquad (П.1.12)$$

Поэтому формула (П.1.12) является признаком потенциальности векторного поля. Если же циркуляция $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру (Г) отлична от нуля, то поле вектора $\vec{a}$ не является потенциальным, его называют вихревым полем.

Введем понятие потока Φ вектора $\vec{a}$. Возьмем в неоднородном поле вектора $\vec{a}$ произвольную поверхность S, выделим на ней элементарную площадку dS и введем вектор $d\vec{S}$, направленный вдоль вектора нормали $\vec{n}$ к площадке (рис.П.1.5,б). Модуль $d\vec{S}$ равен площади dS элементарной площадки.

Тогда **элементарным потоком** $d\Phi$ **вектора** $\vec{a}$ через площадку dS называют величину

$$d\Phi = \vec{a}d\vec{s} = ads\cos\alpha, \qquad \alpha = (\vec{a} \wedge \vec{n}). \qquad (П.1.13)$$

Суммируя потоки $d\Phi$ через все площадки dS поверхности S, найдем поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{a}d\vec{S} = \int_S adS\cos\alpha. \qquad (П.1.14)$$

Если учесть, что густота линий $\vec{a}$ определяет модуль вектора $\vec{a}$ в данной точке поля, то тогда поток вектора $\vec{a}$ численно равен количеству N линий $\vec{a}$, пронизывающих поверхность S.

На рис.П.1.6 приведен ряд примеров расчета потока вектора $\vec{a}$ через различные поверхности S (а, б, в – плоская поверхность, г – замкнутая поверхность)

Однородное поле

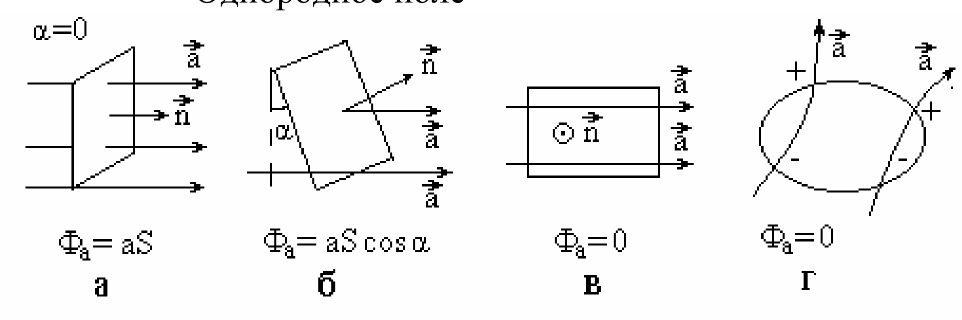


Рис.П.1.6

Поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность (рис.П.1.6,г) равен нулю, так как количество линий, входящих (N_-) и выходящих (N_+) из поверхности, одинаково, но они берутся с противоположными знаками из-за косинуса угла α.

Названия циркуляция и поток вектора $\vec{a}$ были заимствованы из гидростатики, где рассматривается векторное поле скорости $\vec{v}$ течения жидкости. Так, отличие от нуля циркуляции $\vec{v}$ по взятому внутри жидкости замкнутому контуру означает, что жидкость будет двигаться (циркулировать) вдоль него. Отличие же от нуля потока $\vec{\upsilon}$ через какую-либо поверхность, взятую внутри жидкости, означает, что существует поток жидкости через нее, т.е. линии $\vec{\upsilon}$ пересекают эту поверхность.

6.3 Источники векторных полей. Оказывается, что введенные выше понятия потока и циркуляции вектора $\vec{a}$ связаны с наличием в пространстве наличием двух источников этого поля.

Точечный источник векторного поля первого типа – это источник, в котором начинаются или заканчиваются линии $\vec{a}$. Так, например, в случае электростатического поля такими источниками являются точечные положительные и отрицательные заряды (рис.П.1.7,а): в случае поля вектора скорости $\vec{\upsilon}$ жидкости - это точки, где жидкость втекает или уходит из данного объема (рис.П.1.7,б).

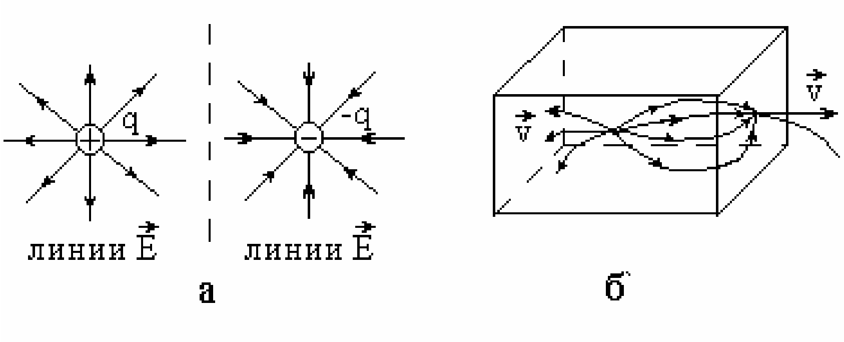


Рис.П.1.7

Если взять произвольную замкнутую поверхность, охватывающую такие источники, то тогда поток Φ вектора $\vec{a}$ через нее будет в общем случае отличен от нуля и будет характеризовать наличие источников в объеме V, ограниченном этой поверхностью.

$$\oint_S \vec{a}\, d\vec{S} = \text{const} \cdot (\text{источник } 1) = \text{const} \int_V \rho dV, \qquad (\text{П.1.15})$$

где введена объемная плотность ρ источников первого типа.

Для поля вектора, где имеются только такие источники, циркуляция по произвольному замкнутому контуру (Г) будет равна нулю, т.е. такое поле будет потенциальным.

Точечный источник поля вектора $\vec{a}$ второго типа создает вокруг себя вихрь, который приводит к возникновению замкнутых линий $\vec{a}$. Это могут быть линии $\vec{B}$ магнитного поля, линии $\vec{E}_B$ вихревого электрического поля, линии $\vec{\upsilon}$ скорости течения жидкости. В случае жидкости точечный источник второго типа можно получить, если в данную точку поместить вертушку, которая будет вызывать вращение жидкости вокруг этой точки.

Если взять произвольный замкнутый контур ($Г$), то наличие в его плоскости вихрей приведет к тому, что циркуляция $\vec{a}$ по этому контуру будет отличной от нуля, т.е. она будет характеризовать наличие вихрей в плоскости контура.

$$\oint_{Г} \vec{a}d\vec{l} = const \cdot (источник2) = const \oint_{Г} \vec{j}d\vec{S}, \qquad (П.1.16)$$

где введен вектор $\vec{j}$, описывающий поверхностную плотность источников второго типа в плоскости контура.

Для поля $\vec{a}$ только с источником второго типа поток вектора $\vec{a}$ через произвольную поверхность будет равен нулю, так как при замкнутых линиях вектора $\vec{a}$ количество линий, входящих и выходящих из такой поверхности, будет одинаково.

Обычно существуют векторные поля, в которых имеется только один из двух источников. Можно привести пример поля, в котором присутствуют одновременно оба источника – это поле скорости $\vec{\upsilon}$ течения жидкости, в котором в какой-то одной точке она вливается в данный объем жидкости и в ней же находится вертушка.

6.4. Дивергенция и ротор вектора $\vec{a}$. Для решения большинства практических задач необходимо применять математический аппарат, позволяющий учитывать наличие источников векторных полей не только в большом объеме пространства, но и в малой окрестности какой-либо точки. Для этого вводятся понятия дивергенции ($div\,\vec{a}$) и ротора ($rot\vec{a}$) вектора $\vec{a}$. Возьмем объем V поля, ограниченного замкнутой поверхностью S, и будет стягивать поверхность в малую окрестность точки А (рис.П.1.8,а).

Тогда **дивергенцией вектора** $\vec{a}$ называют предел

$$div\,\vec{a} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S} \vec{a}d\vec{S} \qquad (П.1.17)$$

Дивергенция (или расхождение) $\vec{a}$ характеризует наличие источников первого типа в малой окрестности точки А.

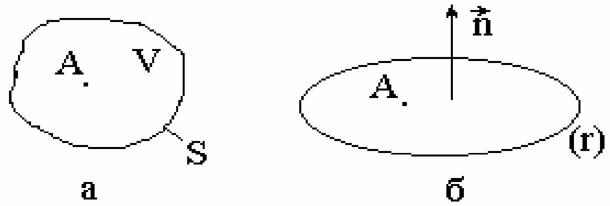


Рис. П.1.8

$$div\,\vec{a} = \text{const} \cdot \rho \quad . \tag{П.1.18}$$

В математике для $div\,\vec{a}$ можно записать следующее выражение

$$div\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a} = \frac{\partial a_X}{\partial x} + \frac{\partial a_Y}{\partial y} + \frac{\partial a_Z}{\partial z} \quad . \tag{П.1.19}$$

Введем понятие ротора вектора $\vec{a}$. Возьмем замкнутый контур (*Г*), ограничивающий поверхность *S*, и будет стягивать контур в малую окрестность точки *A* (рис.П.1.8,б). Тогда **ротором вектора** $\vec{a}$ называют предел

$$rot\,\vec{a} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_{(r)} \vec{a} d\vec{\ell} \quad . \tag{П.1.20}$$

Ротор (вихрь) $\vec{a}$ характеризует наличие источников второго типа в малой окрестности точки А. С учетом формулы (П.1.16) и постоянства $\vec{j}$ в малой окрестности точки А, получим

$$rot\vec{a} = \text{const} \cdot \vec{j} \quad . \tag{П.1.21}$$

В математике для $rot\,\vec{a}$ можно записать следующее выражение:

$$rot\vec{a} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}\right] = \left(\frac{\partial a_Z}{\partial y} - \frac{\partial a_Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_X}{\partial z} - \frac{\partial a_Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_Y}{\partial x} - \frac{\partial a_X}{\partial y}\right)\vec{k} \quad . \tag{П.1.22}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Международная система единиц (СИ)

Как известно, физика является экспериментальной наукой. Любая вводимая в ней величина наполняется конкретным содержанием тогда, когда указан способ ее измерения. Измерить физическую величину – значит сопоставить ее с другой однородной ей величиной, принятой за единицу измерения. В связи с чем важным в физике является указание единиц измерения различных величин и способов их экспериментального определения.

Развитие физики как науки приводит к определенной взаимосвязи физических величин, описывающих разные явления. Можно подобрать, построить такую последовательность физических формул, в которой в каждую новую формулу входит только одна новая величина. Подобранная таким образом последовательность формул приводит к конкретной системе единиц измерения физических величин. В ней выделяют **основные физические величины**, единицы измерения которых выбирают произвольно с помощью соответствующих договоренностей, на основе различных эталонов или специальных опытов, обладающих наибольшей точностью измерений при данном развитии науки и техники. Остальные величины называют **производными величинами**, для них единицы измерения получают из формул – определений этих величин, формул, в которые помимо данной величины входят другие с уже известными единицами измерения.

В настоящее время широкое распространение получила **Международная система единиц (СИ)**, в которой имеются семь основных единиц измерения: длины (метр), времени (секунда), массы (килограмм), количества вещества (моль), температуры (кельвин), силы тока (ампер) и силы света (кандела). В курсе общей физики эта система единиц является основной, хотя в научных статьях применяются и другие системы единиц, например СГС (секунда, грамм, сантиметр).

Рассмотрим подробнее международную систему единиц (СИ). Приведем сначала определение основных единиц измерения этой системы:

1. **Длина, l: метр (м)** – длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона – 86.
2. М**асса, m: килограмм (кг)** – масса международного прототипа, сделанного из платино-иридиевого сплава в виде цилиндрической гири (хранится в Севре, близ Парижа)
3. В**ремя, t: секунда (с)** – время, равное 9192631770 периода излучения, соответствующего энергетическому переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия – 133.
4. Т**ермодинамическая температура, T: кельвин (К)** – это термодинамическая температура, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды.

5. **Количество вещества, μ (ν): моль (моль)** – количество вещества, содержащее столько молекул, сколько атомов содержится в 0,012 кг в углероде - 12
6. **Сила тока, I: ампер(А)** – равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ н.
7. **Сила света, J: кандела (кд)** – сила света, испускаемого с площади 1/600000 $м^2$ сечения полного излучателя в перпендикулярном к этому сечению направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины (2042 К), и давлении 101325 Па.

   В качестве дополнительных единиц измерения в СИ используются **единицы измерения плоского угла – радиан** (1 рад = $57^0 17'44.8''$) и **телесного угла – стерадиан** (1ср = $7{,}96 \cdot 10^{-2}$ полного телесного угла).

Ниже в таблице приводятся единицы измерения различных физических величин в международной системе единиц (СИ), их обозначения (русское и международное) и формулы, по которым можно экспериментально определить эти единицы измерения.

Наименование физ. величины	Формулы-определения	Единицы измерения		
		наименование	обозначение	
			русское	международное
М Е	Х А Н И	К А КИНЕМАТИКА		
Длина, l,S	-	Метр	м	m
Масса, m	-	килограмм	кг	kg
Время, t	-	секунда	с	s
Скорость, υ	$\upsilon = \frac{dS}{dt}$	метр в секунду	м/с	m/s
Ускорение, a	$a = d^2 S / dt^2$	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$	m/s^2
Период обращения, T	-	секунда	с	s
Частота обращения, n	n = 1/T	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	s^{-1}
Угол поворота, φ	-	радиан	рад	rad
Угловая скорость, ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	радиан в секунду	рад/с	rad/s

Угловое ускорение, ε	$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	радиан на секунду в квадрате	рад/$с^2$ rad/s^2
МЕХАНИКА. ДИНАМИКА			
Масса, m	-	килограмм	кг kg
Плотность, ρ	$\rho=m/V$	килограмм на кубический метр	кг/$м^3$ kg/m^3
Момент инерции, I	$I=mr^2$	килограмм-метр в квадрате	кг·$м^2$ kg·m^2
Импульс, p	$p=mv$	килограмм-метр в секунду	кг·м/с kg·m/s
Момент импульса, L	$L=I\omega$	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·$м^2$/с kg·m^2/s
Сила, F	$F=ma$	ньютон	Н N
Момент силы, M	$M=Fd$	ньютон-метр	Н·м N·m
Импульс силы, FΔt	$F\Delta t$	ньютон-секунда	Н·с N·s
Работа, энергия A, W	$A=F_s l$	джоуль	Дж J
Мощность, N	$N=A/t$	ватт	Вт W

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимают под материальной точкой и абсолютно твердым телом?
2. Какие виды движения тел выделяют?
3. Какие характеристики вводят для описания движения тела в кинематике?
4. Что понимают под угловой скоростью, частотой обращения и периодом Т при вращательном движении тела? Как они связаны между собой?
5. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при равнозамедленном движении тела вокруг вертикальной оси?
6. Что понимают под силой, инертностью тела и его массой? Как изменится инертность тела, если его масса возрастет?
7. Сформулируйте первый закон Ньютона. Какая система отсчета называется инерциальной?
8. Сформулируйте второй закон Ньютона. Приведите схему решения задач динамики
9. Сформулируйте третий закон Ньютона.
10. Сформулируйте закон сохранения импульса. Перечислите случаи выполнения закона сохранения импульса в незамкнутых системах.
11. Что понимают под центром масс системы? В чем отличие центра масс и центра тяжести абсолютно твердого тела?
12. Запишите основной закон динамики вращательного движения. Поясните входящие в него величины.
13. Сформулируйте закон сохранения импульса. Приведите примеры его проявления.
14. Сформулируйте теорему о кинетической энергии тела.
15. Сформулируйте теорему о потенциальной энергии тела. Какие силы называются консервативными силами?
16. Запишите формулу связи консервативной силы и потенциальной энергии тела. Как направлен вектор градиента потенциальной энергии в поле тяготения Земли.
17. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. С каким фундаментальным свойством времени он связан?
18. Что понимают под потенциальными кривыми. Приведите пример одной из них.
19. Сформулируйте постулаты специальной теории относительности.
20. Какие следствия вытекают из постулатов С.Т.О. для свойств пространства и времени?
21. Что понимают под собственной длиной предмета? Что происходит с размерами предметов при их движении?
22. Можно ли с помощью релятивистского закона сложения скоростей получить скорость движения тела, большую скорости света?
23. Сформулируйте закон взаимосвязи массы и энергии тела.
24. Перечислите инварианты С.Т.О.
25. Какую роль играет С.Т.О. в современной физической картине мира?

26. Как описывается движение тел в неинерциальных системах отсчета? Что понимают под силами инерции?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т.И. Трофимова. Курс физики. М.Высш.шк.1990.-478с.
2. А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики. М. Высш.шк.1989.-608с.
3. И.В. Савельев. Курс физики.Т.1,М.Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит.1989.-352с.
4. И.В. Савельев. Курс физики.Т.2,М.Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит.1989.-350с.
5. Д.З. Сивухин. Общий курс физики. Т.1., Механика .М., Наука, 1989.-687с.
6. А.И. Матвеев Механика и теория относительности. Москва. Высшая школа, 1983.-320с.
7. А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. Задачник по физике. М. Высшая школа. 2000.-527с.
8. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике: Учеб.пособие.-3-е изд., перераб.-М. Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 2000.-416с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Марс Гильманович Валишев

Александр Александрович Повзнер

Физика

Часть 1. МЕХАНИКА

Редактор *Н.П. Кубышенко*

Компьютерная верстка *К.А. Шумихиной*

ИД № 06263 от 12 .11. 2001 г.

Подписано в печать 06.02. 2006 Формат 60x84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ. л. 4,65
Уч. – изд.л. 5,23 Тираж Заказ Цена “С”

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ – УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ – УПИ