Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

В.В. Катальников
Ю.В. Шапарь

Сборник задач по теории вероятностей

Учебное электронное текстовое издание
Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики»
Научный редактор проф., канд. физ.-мат. наук В.А. Табуева

Представлены основные понятия и некоторые методы решения задач по теории вероятностей, а также подобраны варианты задач разной сложности, охватывающих все основные разделы теории. Каждому разделу предпосланы методические указания, содержащие примеры решения задач, что позволяет учесть различный уровень подготовки студентов.

Предназначено для студентов всех форм обучения всех специальностей УГТУ-УПИ.

Екатеринбург
2007

РАЗДЕЛ I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторикой называется раздел математики, изучающий способы подсчёта числа комбинаций, которые можно составить из элементов конечных множеств. Под *комбинацией* мы будем понимать некоторый набор элементов данного множества.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил ─ правила умножения и правила сложения.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами, а второй ─ n_2 способами, то оба объекта в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило сложения: если два выбора объектов взаимно исключают друг друга, причём один из них можно выполнить n_1 способами, а другой ─ n_2 способами, то выполнить любое из этих действий можно n_1+n_2 способами.

Эти правила распространяются на любое конечное число объектов и операций над этими объектами.

Примеры: 1. Из группы студентов в 30 человек требуется наугад выбрать старосту и профорга. Сколько всего возможно комбинаций?

Решение. Для выбора старосты имеется 30 вариантов. Далее, профорга можно выбрать 29 способами. Следовательно, всего возможно 29·30 = 870 комбинаций.

2. Из города Е в город Ч можно добраться одним из 2 авиарейсов, либо одним из 5 поездов, либо одним из 10 автобусов. Очевидно, что из Е в Ч можно попасть 2+5+10 = 17 способами.

Определение. *Размещениями* из n элементов по m $(0 \le m \le n)$ называются такие m-элементные комбинации, выбранные из данных n элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений находится по формуле

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m-1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1)$$

Определение. *Перестановками* из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n! \qquad (2)$$

Определение. *Сочетаниями* из n элементов по m называются m-элементные комбинации, выбранные из n элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т.е. отличаются только составом элементов).

Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (3)$$

Отсюда следуют свойства *биномиальных коэффициентов* C_n^m:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ – правило симметрии;

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

$C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$

Если при упорядоченном выборе m элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки называются *размещениями с повторениями.* Число всех размещений с повторениями из n элементов по m обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Если при выборе m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, т.е. повторяться), то полученные выборки есть *сочетания с повторениями.* Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \qquad (4)$$

Пусть во множестве из n элементов есть k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется n_1 раз, 2-й — n_2 раз, …, k-й — n_k раз, причём $n_1+n_2+\ldots+n_k= n$. Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями.* Число перестановок с повторениями из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}. \qquad (5)$$

Все формулы можно свести в следующую таблицу

	Размещения	Перестановки	Сочетания
1	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
2	$\overline{A}_n^m = n^m$	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$	$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Примечание. *1-я строка – без возвращений, 2-я строка – с возвращением.*

Задачи

1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию по 5 адресам?

2. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если: *а*) цифры не повторяются; *б*) цифры могут повторяться?

3. Студентам нужно сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

4. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 9 гвоздик, 15 роз и 7 хризантем?

5. В хоккейном туре участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр будет сыграно в турнире?

6. Из трёх классов спортивной школы нужно составить команду из трёх человек, взяв по одному ученику из каждого класса. Сколько различных команд можно составить, если в классах соответственно 18, 20 и 22 ученика?

7. Имеется 5 конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для письма?

8. На десяти различных жетонах написаны буквы А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Жетоны случайным образом перемешаны и выкладываются в ряд. Сколькими способами можно получить таким образом слово «МАТЕМАТИКА»?

9. Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков?

10. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятёрку» попадут:
а) одни девушки; *б*) 3 юноши и 2 девушки;
в) 1 юноша и 4 девушки; *г*) 5 юношей?

11. Автомобильные номера состоят либо из трёх букв и трёх цифр, либо из двух букв и четырёх цифр. Найти число таких номеров, если используются 30 букв русского алфавита.

12. Сколькими способами можно составить дозор из трёх солдат и одного офицера, если имеется 4 офицера и 8 солдат?

13. В урне 6 белых и 4 чёрных шаров. Сколькими способами можно извлечь 2 белых и 3 чёрных шара?

14. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя?

15. Группа шахматистов сыграла между собой 28 партий. Каждые два из них встречались между собой один раз. Сколько шахматистов участвовало в соревнованиях?

16. Сколькими способами можно рассадить 18 человек в 18-местном автобусе?

17. Сколько обыкновенных дробей можно составить из чисел 3, 5, 11, 13, 16, 17?

18. В урне 5 белых и 8 чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать: а) 2 шара разных цветов; б) 2 белых шара; в) 2 чёрных шара?

2. Случайные события. Действия над событиями

Событием (или *случайным событием*) называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C,\ldots$.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события; обозначается $P(A)$.

Достоверным называется событие Ω, которое в результате опыта обязательно должно произойти: $P(\Omega)=1$.

Невозможным называется событие $\varnothing$, которое в результате опыта не может произойти: $P(\varnothing)=0$.

Вероятность любого события заключена между нулём и единицей – $0 \le P(A) \le 1$.

Несколько событий называются *несовместными,* если никакие два из них не могут появиться вместе в одном опыте.

Суммой событий A и *B* называется событие $C = A + B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий *A* и *B* (т.е. *или A, или B, или* оба вместе).

Произведением событий A и *B* называется событие $C = A \cdot B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события (т.е. *и A и B* вместе).

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Иными словами, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие *A*.

Для него справедливы тождества

$$A + \overline{A} = \Omega, \quad A\overline{A} = \varnothing.$$

Полезно также следующее теоретико-множественное определение.

Множество $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ (или $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$) всех возможных взаимно исключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий,* а сами исходы ω_i — *элементарными событиями.*

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии данного опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Задачи

19. Указать пространства элементарных событий для следующих опытов: *а*) подбрасывание двух игральных костей; *б*) стрельба по мишени до первого попадания; *в*) наблюдение за временем безотказной работы прибора.

20. Игральная кость бросается 1 раз. Описать пространство элементарных событий, указать элементарные события, благоприятствующие событиям: A_1 = {выпало чётное число очков}; A_2 = {выпало не менее 4 очков}; A_3 = {выпало более 6 очков}.

21. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие A_1 = {первый студент решил задачу}, A_2 = {второй студент решил задачу}, A_3 = {третий студент решил задачу}. Выразить через события A_i (i = 1, 2, 3) следующие события:

1) A = {все студенты решили задачу};
2) B = {задачу решил только первый студент};
3) C = {задачу решил хотя бы один студент};
4) D = {задачу решил только один студент}.

22. Электрическая цепь составлена по схемам, приведённым на рис.1. Событие A_i = {элемент с номером i вышел из строя}, i = 1, 2, 3. Событие B = {цепь вышла из строя}. Выразить события B и $\overline{B}$ через события A_i.

3. Классическое определение вероятности

Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими группу несовместных событий. Такие исходы называются *элементарными исходами (событиями), случаями, шансами.* Случаи, которые приводят к наступлению события *A,* называются *благоприятными* ему.

Определение. *Вероятностью события A* называется отношение числа m благоприятных исходов, к числу n всевозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (6)$$

Это *классическое* определение вероятности.

23. Игральную кость бросают дважды. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

24. В урне 3 белых и 5 чёрных шаров. Одновременно вынима-ют 3 шара. Что вероятнее: вынуть 2 белых и 1 чёрный или 2 чёрных и 1 белый шар?

25. На карточках написаны буквы: Л, И, Т, Е, Р, А. На стол наудачу по одной выкладывают 4 карточки. Какова вероятность того, что получится слово «ТИРЕ»?

26. Из колоды карт (52 шт.) Герман наудачу выбирает три карты. Какова вероятность того, что эти карты – «тройка», «семёрка», туз?

26. В урне 20 шаров с номерами 1, 2,…, 20. Наудачу выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них есть шары с номерами 1 и 2.

27. Из 12 лотерейных билетов, среди которых 4 выигрышных, берут 6. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один выигрышный?

28. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не больше 3?

29. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятности следующих событий:

A = {в каждой из пачек окажется по два короля};

B = {в одной из пачек не будет ни одного короля, а в другой – все четыре};

C = {в одной из пачек будет один король, а в другой – три}.

31. В первом ящике находятся шары с номерами 1 … 5, во втором – с номерами 6…10. Из каждого ящика вынимают по шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: *а*) не меньше 7; *б*) равна 11?

32. В лотерейном билете нужно зачеркнуть 6 номеров из 49. Какова вероятность угадать: *а*) 6 номеров; *б*) 5 номеров; *в*) 4 номера; *г*) 3 номера; *д*) 2 номера; *е*) один номер?

33. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируется 2 группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Найти вероятности следующих событий:

A = {все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу};

Б = {две команды экстракласса попадут в одну из групп, а три – в другую}.

34. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трёх выбранных вопросов студент знает ответ на: *а*) 3 вопроса; *б*) 2 вопроса; *в*) 1 вопрос.

35. Из букв А, С, Н, Н, А, А разрезной азбуки составляется наудачу слово, состоящее из 6 букв. Какова вероятность того, что получится слово «АНАНАС»?

36. Техническое устройство, состоящее из 10 блоков, вышло из строя из-за отказа какого-то блока. Для его отыскания проверяют все блоки по очереди, пока не обнаружится неисправный блок. Определить вероятность того, что проверять придётся не менее половины всех блоков.

37. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется трёхзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что это число будет чётным?

38. В шахматном турнире участвуют 12 человек, которые по жребию разбиваются на две группы по 6 человек. Найти вероятность того, что двое наиболее сильных шахматистов попадут в разные группы.

39. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A = {все пассажиры выйдут на четвёртом этаже};

B = {все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже)};

C = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

40. Через автобусную остановку проходят автобусы пяти маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов №1 или №3. Какова вероятность того, что нужный ему автобус будет одним из первых двух подошедших к остановке?

4. Применение комбинаторных методов в статистической физике

Пусть механическая система состоит из r частиц, которые находятся в фазовом пространстве, разбитом на n ячеек (n состояний). Как распределятся эти частицы по состояниям?

Ответ зависит от выбора статистики.

1. В классической *статистике Максвелла-Больцмана* частицы считаются различимыми, т.е. каждой из них присваивается свой номер, при этом, в силу их тождественности, они с одинаковой

вероятностью попадают в любую из n ячеек. Таким образом, число равновозможных состояний равно

$$N = n^r. \tag{7}$$

2. В *статистике Бозе-Эйнштейна* предполагается, что час-тицы абсолютно не различимы, причём все возможные их распределения по ячейкам равновероятны. В этом случае число равновозможных состояний определяется числом сочетаний с повторением (формула (4)) и равно

$$N = C_{n+r-1}^{r}. \tag{8}$$

3. В *статистике Ферми-Дирака* частицы также абсолютно неразличимы, однако в отличие от предыдущего их число должно быть меньше числа ячеек $(r \le n)$ и каждая ячейка может содержать не более одной частицы. В этом случае число равновозможных состояний равно

$$N = C_n^r. \tag{9}$$

Тогда вероятность того, что рассматриваемые r частиц распределятся в заданных r ячейках из числа возможных n ячеек, равна соответственно:

$$1.\ P_n(r) = \frac{r!}{n^r}. \quad 2.\ P_n(r) = \frac{1}{C_{n+r-1}^r}. \quad 3.\ P_n(r) = \frac{1}{C_n^r}. \tag{10}$$

Задача

Определить для этих же случаев вероятность распределения r частиц по одной в *любых* r ячейках из числа n возможных ячеек.

5. Геометрический подсчёт вероятностей

Классическая схема теории вероятностей применима, если имеется конечное число равновозможных исходов. Если же имеется бесконечное множество элементарных исходов и они образуют всюду плотное множество, тогда используется геометрический подход. В основе его, как и в классической схеме, лежит представление о равновозможных исходах, а вероятности трактуются как «доли» множества всех элементарных исходов.

Пусть точка бросается наугад в некоторую область A (рис.2). Тогда вероятность попадания точки в некоторую часть B области A равна отношению меры (длины, площади, объёма) этой части к мере всей области A:

$$P(B)=\frac{\mu(B)}{\mu(A)}. \qquad (11)$$

При этом предполагается, что указанные меры определены, причём $\mu(A)\neq 0$.

Пример (задача о встрече). Двое условились встретиться в определённом месте между полуднем и часом дня. Каждый из пришедших первым ждёт другого 15 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи друзей, если приход каждого из них в течение указанного часа происходит наугад и моменты прихода независимы.

Решение. Пусть x и y – моменты прихода договорившихся сторон; $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ (в часах). Тогда условие встречи запишется в виде:

$$|x-y|\le\frac{1}{4}.$$

Теперь задачу можно интерпретировать следующим образом. В квадрат

$$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$$

в декартовой системе координат (рис. 3) наугад бросают точку. Какова вероятность того, что её координаты будут удовлетворять условию $|x-y|\le 1/4$?

Искомая вероятность, очевидно, равна отношению выделенного шестиугольника к площади квадрата:

$$p=\frac{1^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1^2}=\frac{7}{16}.$$

Задачи

41. Точку бросают наугад в круг $x^2+y^2\le 1$. Какова вероятность того, что:

а) расстояние от точки до центра круга превысит 1/2;

б) абсцисса точки будет не больше 1/2;

в) точка окажется вне квадрата, вписанного в данный круг?

42. Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе α радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

43. В случайный момент времени $x \in [0,T]$ появляется радиосигнал длительностью t_1. В случайный момент времени $y \in [0,T]$ включается приёмник на время $t_2 < t_1$. Найти вероятность обнаружения сигнала, если приёмник настраивается мгновенно.

44. На отрезке длины l наудачу выбирают две точки M_1 и M_2. Определить вероятность того, что из полученных трёх отрезков можно построить треугольник.

45. На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки *A, B* и *C.* Какова вероятность того, что треугольник *ABC* остроугольный?

46. На пол, покрытый кафельной плиткой со стороной $a = 6$ см, случайно падает монета радиуса $r = 2$ см. Найти вероятность того, что монета окажется целиком внутри квадрата.

47. В единичный квадрат $[0,1]\times[0,1]$ наугад брошена точка. Пусть (ξ,η) – её координаты. Доказать, что для любых $0 \le x, y \le 1$ $P(\xi < x, \eta < y) = xy$. Найти: *а*) $P(|\xi - \eta| < z)$; *б*) $P(\min\{\xi,\eta\} < z)$; *в)* $P(\xi\eta < z)$; *г*) $P(\xi + 2\eta < z)$.

48 (*Продолжение*). В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что корни уравнения $t^2 + \xi t + \eta = 0$ действительные. Решить эту же задачу для уравнения $t^2 + 2\xi t + \eta = 0$.

49. На отрезке $[a,b]$ наудачу ставят две точки. Пусть *x,y* – их координаты. Найти вероятности событий *A, B, AB, A+B,* если *A* = {вторая точка ближе к левому концу отрезка, чем первая к правому концу}; *B* = {расстояние между точками меньше половины длины отрезка}.

6. Условная вероятность. Правила умножения и сложения вероятностей

Пусть рассматривается опыт с *N* элементарными исходами. *A* и *B* – случайные события, связанные с этим опытом. Отношение $\frac{N_{AB}}{N_B}$ $(N_B \ne 0)$ можно рассматривать как долю исходов, благоприятствующих событию *B*, которые благоприятствуют и событию *A*. Такое отношение называется *условной вероятностью* события *A* при условии *B* и обозначается *P*(*A*/*B*).

Итак, в классической схеме теории вероятностей

$$P(A/B)=\frac{N_{AB}}{N_B}. \qquad (12)$$

Поделив в правой части (12) числитель и знаменатель на *N*, получим определение *условной вероятности:*

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (13)$$

Из этого определения вытекает *формула умножения вероятностей:*

$$P(AB)=P(A/B)P(B)=P(B/A)P(A). \qquad (14)$$

Эта формула легко обобщается на случай любого числа событий. В частности, вероятность произведения трёх событий

$$P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB). \qquad (15)$$

Событие *A* называется *независимым* от события *B*, если вероятность события *A* не зависит от того, осуществилось или нет событие *B*. В этом случае $P(A/B)=P(A)$ и соответственно $P(B/A)=P(B)$, а правило умножения вероятностей принимает вид

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (16)$$

Вероятность суммы *совместных* событий

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ и $P(A+B)=P(A)+P(B)$ – для *несовместных* событий.

Вероятность наступления хотя бы одного события

При вычислении вероятности сложного события бывает удобно пользоваться формулой вычисления вероятности противоположного события

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (17)$$

Например, пусть события A_i = {задачу решил *i*- й студент}, (*i* = 1, 2, 3) (см. задачу 21) независимы и известны вероятности их наступления: $P(A_1)=p_1, P(A_2)=p_2, P(A_3)=p_3$. Пусть A – событие, состоящее в том, что решил задачу хотя бы один студент. Следовательно, $A=A_1+A_2+A_3$.

Для нахождения вероятности такого события удобно перейти к противоположному событию $\overline{A}$, которое равно произведению противоположных событий – {задачу не решил ни один из студентов}: $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$.

Применяя к нему формулу (17), получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3), \text{ или } P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3,$$

где $q_1 = 1 - p_1, \quad q_2 = 1 - p_2, \quad q_3 = 1 - p_3$.

Задачи

50. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Стрелки произвели по одному выстрелу по мишени. Считая попадания в мишень для отдельных стрелков событиями независимыми, найти вероятности следующих событий: *A*= {ни одного попадания в мишень}; В= {ровно одно попадание в мишень}.

51. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,5. По условиям приёма события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов.

52. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

А = {выпадение герба на первой монете};

D = {выпадение хотя бы одного герба};

E = {выпадение хотя бы одной цифры};

F = {выпадение герба на второй монете}.

Определить, зависимы или независимы пары событий:

1) А и E; 2) А и F; 3) D и E; 4) D и F.

Указание. Сначала определяются безусловные вероятности событий А, D, E и F и соответствующих произведений, а затем по формуле (13) условные вероятности.

53. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 25 вопросов из 30. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос билета и на один дополнительный вопрос из этих же 30 вопросов.

54. Студент выполняет контрольную работу на тестирующей машине. Работа состоит из трёх задач. Для каждой задачи предложено 5 вариантов ответов, из которых только один правильный. Студент Иванов плохо знает материал и поэтому выбирает ответы наудачу. Какова вероятность того, что он пройдёт тест?

55. На рис. 1 и 4 приведены схемы соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Считается известной надёжность p_k (вероятность безотказной работы) k-го элемента (соответственно $q_k = 1 - p_k$ – вероятность его отказа). Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надёжность каждой из схем.

а *б*

Рис. 4

56. За некоторый промежуток времени амёба может погибнуть с вероятностью 1/4, выжить с вероятностью 1/4 и разделиться на две с вероятностью 1/2. В следующий такой же промежуток времени с каждой амёбой независимо от её «происхождения» происходит то же самое. Сколько амёб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?

57. Двое поочерёдно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша каждого игрока.

58. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях игральной кости шестёрка выпадет не менее трёх раз подряд?

59. Стрелку́, имеющему пять патронов, разрешено стрелять до первого промаха или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок израсходует не все патроны?

60. Один студент выучил 20 вопросов программы из 20, второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответит хотя бы один студент.

61. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трёх выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания при одном выстреле, предполагая, что попадания при каждом выстреле независимы и равновероятны.

7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Теорема 7.1. Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, т.е. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \quad H_i \cdot H_j = \varnothing,\ i \neq j.$

Тогда вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \tag{18}$$

При этом события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами,* а $P(H_i)$ – *вероятностями гипотез,* $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Теорема 7.2. Если в результате опыта осуществилось событие A, то прежние, доопытные (или *априорные*) вероятности гипотез $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ должны быть заменены на новые, послеопытные (или *апостериорные*) вероятности $P(H_1/A), \ldots, P(H_n/A)$, которые вычисляются по *формуле Байеса:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)} \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

где *P(A)* вычисляется по формуле (18).

Задачи

62. В продажу поступают телевизоры трёх заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 % и третьего – 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % – со второго и 50 % – с третьего?

63. На рис. 5 изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта А, выбирая каждый раз на развилке дорог дальнейший путь наудачу. Какова вероятность того, что они попадут в пункт В?

64. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

65. Из 10 студентов, сдающих экзамен по теории вероятностей, два студента знают по 20 билетов из 30, один – 15 билетов, остальные знают все билеты. Чему равна вероятность того, что случайно взятый студент сдаст экзамен, если знание билета обеспечивает сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а незнание – с вероятностью 0,1.

66. В двух коробках находятся батарейки – в первой 12, из них одна разряжена, во второй – 10 и одна тоже разряжена. Из первой коробки во вторую переложена случайно взятая батарейка. Найти вероятность того, что взятая наугад из второй коробки батарейка будет разряжена.

67. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых, во второй – 20 шаров, из которых 4 белых. Из каждой урны берут наугад по одному шару, а затем из этих двух шаров выбирают наудачу один. Найти вероятность того, что он белый.

68. В студенческой группе 70 % – юноши. 20 % юношей и 40 % девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал: *а*) юноше; *б*) девушке?

69. **69.** Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов 1 и 2 (рис. 6) и может случайным образом работать в одном из двух режимов: благоприятном и неблагоприятном. Надёжность каждого из узлов в благоприятном режиме равна $p_1 = 0,9$, в неблагоприятном

$p_2 = 0,2$. Вероятность того, что прибор будет

работать в благоприятном режиме,

равна $P_1 = 0,85$, в неблагоприятном

$1 - P_1 = 0,15$. Найти полную (среднюю) надёжность прибора.

70. Военный корабль может пройти вдоль пролива шириной 1 км с минным заграждением в любом месте. Вероятность его подрыва на мине в правой части заграждения шириной 200 м равна 0,3, а на остальной части – 0,8. 1) Найти вероятность того, что корабль благополучно пройдёт пролив. 2) Корабль благополучно прошёл пролив. Какова вероятность того, что он прошёл его в левой части пролива?

71. Вероятность попадания в цель для трёх стрелков равны соответственно 4/5, 3/4 и 2/3. Для поражения цели в неё нужно попасть не менее двух раз. В результате одновременного выстрела всех трёх стрелков цель была поражена. Какова вероятность того, что в цель попал третий стрелок?

72. По объекту производится три одиночных (независимых) выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором 0,5, при третьем 0,7. Для вывода объекта из строя заведомо достаточно трёх попаданий; при двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0,6; при одном – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в результате трёх выстрелов объект будет выведен из строя.

8. Повторные независимые испытания

8.1. Формула Бернулли

О схеме Бернулли говорят, когда рассматривается последовательность независимых испытаний, каждое из которых завершается наступлением (успехом) или ненаступлением (неуспехом) случайного события *A*. Если в одном испытании $P(A) = p$, то $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Вероятность $P_n(m)$ того, что в *n* независимых испытаниях произойдёт ровно *m* успехов (событие *A* произойдёт ровно *m* раз) вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (20)$$

Сумма всех этих вероятностей равна 1: $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

Кроме того, согласно формуле бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1 . \qquad (21)$$

Наивероятнейшее число успехов m в серии из n испытаний можно найти из неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + q. \qquad (22)$$

Обобщением схемы Бернулли служит *полиномиальная схема* на случай, когда каждое испытание имеет произвольное число $k > 2$ исходов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ соответственно, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$. При этом вероятность $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ того, что в n испытаниях исход A_1 будет наблюдаться n_1 раз, исход A_2 – n_2 раз, …, $A_к$ – $n_к$ раз, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, определяется *полиномиальной формулой*

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}.$$

Задачи

73. По каналу связи передаётся 6 сообщений. Каждое из сообщений, независимо от других, искажается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что: *а*) ровно 2 сообщения из 6 искажены; *б*) не менее двух сообщений из 6 искажены.

Решение. Событие A – сообщение искажено с вероятностью p = 0,2; q = 0,8.

а) $P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \dfrac{6!}{2!4!} 0{,}2^2 0{,}8^4 \approx 0{,}246$;

б) $P_6(k \ge 2) = 1 - P_6(k < 2) = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] =$

$= 1 - (0{,}8^6 + 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^5) \approx 0{,}345.$

74. По мишени произведено 3 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность n попаданий в мишень, где n = 0, 1, 2, 3.

75. Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наивероятнейшее число опоздавших студентов из 96, пришедших на лекцию.

76. Тест содержит 10 вопросов, на которые следует отвечать, используя одно из двух слов: да, нет. Какова вероятность студентов получить не менее 80 % правильных ответов, если использовать «метод угадывания»?

77. Каждый выпущенный по цели снаряд попадает в неё, независимо от других снарядов, с вероятностью 0,4. Если в цель попал один снаряд, она поражается с вероятностью 0,3; если два снаряда – с вероятностью 0,7; если три или более снарядов, то цель поражается наверняка. Найти вероятность поражения цели при условии, что по ней выпущено: *а*) 3 снаряда; *б*) 4 снаряда.

78. Определить вероятность P_n того, что при n подбрасываниях монеты гербов выпадает больше, чем решек. Приведите значения этой вероятности при $n = 5$ и $n = 6$.

79. В круг вписан квадрат. Чему равна вероятность того, что из четырёх точек, брошенных наугад в данный круг, только одна попадёт внутрь квадрата? Каково наиболее вероятное число точек, попавших в квадрат?

8.2. Приближённые формулы в схеме Бернулли

Формула Бернулли справедлива при *любом* числе n испытаний. Однако если n велико, то вычисления становятся громоздкими. Поэтому при больших n вместо неё, как правило, используют приближённые формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Теорема 1 (***теорема Пуассона***). Если $n \to \infty, p \to 0$ так, что $np \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$, то

$$C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \qquad (23)$$

при любом фиксированном $m = 0, 1, 2, \ldots$.

В схеме Бернулли эту теорему используют, когда число испытаний n достаточно велико, а вероятность успеха p в отдельном испытании достаточно мала (как правило, достаточно условий $p < 0{,}1$; $npq < 10$). Тогда вероятность

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \lambda = np, \qquad (24)$$

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m=m_2} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (25)$$

Теорема 2 (*локальная теорема Муавра-Лапласа*). Если число испытаний n велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условий $n > 25$, $npq > 10$), то вероятность $P_n(m)$ можно приближённо найти по *локальной формуле Муавра- Лапласа*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{26}$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

Теорема 3 (*интегральная теорема Муавра-Лапласа*). В условиях локальной формулы Муавра-Лапласа вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что число успехов m заключено между m_1 и m_2, можно приближённо найти по *интегральной формуле Муавра-Лапласа*

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{27}$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\quad \Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi_0(x)$ берут из математико-статистических таблиц, которые приведены в приложениях.

Задачи

80. Вероятность сбоя в системе при переключении её режимов равна 0,001. Найти вероятность того, что в 5000 переключениях будет не меньше двух сбоев.

81. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1200 знаков, равна 0,005. Найти вероятность того, что при наборе текста будет допущено: *а*) 6 ошибок; *б*) хотя бы одна ошибка.

82. Какова вероятность того, что среди 730 пассажиров поезда: *а*) четверо родилось 23 февраля; *б*) двое родилось 1 марта; *в*) никто не родился 22 июня? (Считать, что в году 365 дней.)

83. В некоторой области имеется 16200 тракторов. Известно, что в течение сезона в среднем у одной трети тракторов выходит из строя некоторая деталь, которая требует замены. Было заготовлено 5400 деталей для замены.

1. Какова вероятность того, что этого количества деталей достаточно для обеспечения непрерывной работы в течение сезона?
2. Сколько нужно заготовить деталей, чтобы с вероятностью 0,95 их было достаточно для обеспечения нормальной работы тракторов в течение сезона?

84. Радиотелеграфная станция передаёт цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности следующих событий: A = {в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок}, В = {будет сделано ровно 7 ошибок}.

85. Вероятность рождения мальчика p =0,512. Считая применимыми локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа, вычислить вероятности событий: A = {среди 100 новорождённых будет 51 мальчик}, B = {среди 100 новорождённых будет больше мальчиков, чем девочек}.

86. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 у.е. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 у.е. Найти вероятности событий: A = {по истечении года работы страховая компания потерпит убыток}, B_m = {страховая компания получит прибыль m у.е.}, если m = 40000, 60000, 80000.

8.3. Отклонение относительной частоты от вероятности

Теория вероятностей имеет важное практическое значение, когда число испытаний n очень велико. В этом случае событие, вероятность которого близка к 1, почти обязательно происходит, а если вероятность события очень мала, то оно наступает редко.

Пусть m – число испытаний, при которых произошло событие A в серии из n испытаний. Тогда отношение $\mu = \dfrac{m}{n}$ называется *относительной частотой* наступления события A в данной серии испытаний.

Если n велико, то вероятность отклонения относительной частоты μ от вероятности успеха p в пределах заданной погрешности $\varepsilon > 0$ определяется формулой

$$P(|\mu - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{28}$$

(*Закон больших чисел в схеме Бернулли)*.

Кроме того, при решении задач используется также формула

$$P\left(|m - np| < \delta\sqrt{npq}\right) \approx 2\Phi(\delta),$$

которая легко получается из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Рассмотрим примеры задач, решаемых с помощью этой формулы.

Пример. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,01. Найти:

а) вероятность того, что в партии из 1000 изделий относительная частота бракованных изделий отклонится от вероятности бракованного изделия не более чем на 0,001;

б) какой должна быть партия изделий, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что относительная частота бракованного изделия отклонится от вероятности 0,01 не более, чем на 0,002;

в) определить границу отклонения частоты от вероятности, которую можно гарантировать с вероятностью 0,99 при объёме партии в n = 2000 изделий.

Решение. а) Согласно формуле (28)

$$P(|\mu - p| \le 0,001) \approx 2\Phi_0\left(0,001\cdot\sqrt{\frac{1000}{0,01\cdot 0,99}}\right) =$$

$$= 2\Phi_0(0,31782) = 2\cdot 0,1255 = 0,251.$$

б) По той же формуле получим $0,9 \approx 2\Phi_0\left(0,002\cdot\sqrt{\frac{n}{0,01\cdot 0,99}}\right)$, откуда

$\Phi_0(x) = 0,45.$ Используя таблицы, находим

$$x = 0,002\cdot\sqrt{\frac{n}{0,01\cdot 0,99}} = 1,64, \text{ и } n = 6657.$$

в) Далее определяем величину ε: $0,99 \approx 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{2000}{0,01\cdot 0,99}}\right)$,

откуда $\Phi_0(x) = 0,4950$ и x = 2,575. Следовательно,

$$\varepsilon = 2,575\sqrt{\frac{0,01\cdot 0,99}{2000}} = 0,00573.$$

Задачи

87. Какое минимальное количество раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью не меньшей, чем 0,95, отклонение относительной частоты выпадения герба от вероятности его выпадения не превышало 0,01?

88. Полагая вероятность рождения мальчика равной 0,52, оценить пределы, в которых с вероятностью 0,95 будет заключено число мальчиков из тысячи новорождённых.

89. Оценить, в каких пределах с вероятностью P заключено число шестёрок, выпадающих при подбрасывании 1000 игральных костей, если: *а)* P = 0,95; *б)* P = 0,99.

90. Вероятность прорыва плотины при максимальной силе урагана равна 0,01. Строители гарантировали, что плотина выдержит до 500 ударов стихии. В год происходит до двенадцати ураганов. Оценить вероятность прорыва плотины в течение 20 лет.

91. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Какова вероятность того, что на седьмом этаже выйдут трое из них?

92. При прохождении порога байдарка не получает повреждения с вероятностью 0,6, получает серьёзное повреждение с вероятностью 0,3 и полностью ломается с вероятностью 0,1. Два серьёзных повреждения приводят к полной поломке. Какова вероятность того, что при прохождении пяти порогов байдарка не будет полностью сломана?

Учебное электронное текстовое издание

Катальников Виктор Владимирович
Шапарь Юлия Викторовна

Сборник задач по теории вероятностей

Редактор *И. В. Коршунова*
Компьютерная верстка *В. В. Катальникова*
Подготовка к публикации *Н.В. Лутова*

Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
Разрешен к публикации 30.05.07.
Электронный формат – PDF
Формат 60×90 1/8

Издательство ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: sh@uchdep.ustu.ru

Информационный портал
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
http://www.ustu.ru